УДК 528.21

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, д-р техн. наук, А. Н. МАРЧЕНКО
Львовский политехнический институт

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВНЕШНИЙ ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЗЕМЛИ

§ 1. Как известно, внешний гравитационный потенциал планет V представляют рядом по шаровым функциям

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n, \tag{1}$$

причем каждый член этого ряда трактуют потенциалом n-го порядка [5]:

$$V_n = \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \tag{2}$$

где сферическая функция Y_n может быть записана либо в виде линейной комбинации стандартных гармоник

$$Y_n = fMa^n \sum_{m=0}^{n} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda)\, P_n^m(\cos \vartheta), \tag{3}$$

(здесь C_{nm}, S_{nm} — $(2n+1)$ стоксовых постоянных планеты), либо по Максвеллу в форме выражения, содержащего дифференцирование по ее n осям [10, 3, 6].

При изучении гравитационного потенциала (особенно при дифференцированном подходе к исследованию фигуры геоида [7]) немаловажное значение имеет определение экстремальных значений и положений точек экстремумов Y_n. С учетом того, что сферическая функция представляет совокупность значений шаровой функции на сфере радиуса $r=1$, будем искать условия, при которых однородный гармонический многочлен $V_n = V_n(x, y, z)$ принимает экстремальные значения на сфере

$$x^2+y^2+z^2=1. \tag{4}$$

Это задача на условный экстремум, для решения которой воспользуемся методом Лагранжа.

Составляя вспомогательную функцию

$$F_n(x, y, z) = V_n(x, y, z) - \frac{\lambda}{2}(x^2+y^2+z^2-1), \tag{5}$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа, получаем, что координаты точек экстремума удовлетворяют системе

$$\left.\frac{\partial V_n}{\partial x} - \lambda x = 0;\quad \frac{\partial V_n}{\partial y} - \lambda y = 0;\quad \frac{\partial V_n}{\partial z} - \lambda z = 0\ \right\}. \tag{6}$$

Вообще говоря, эта система и уравнение (4) дают решение задачи в общем виде: из них можно найти множитель λ и координаты точек экстремумов. Однако свойство однородности шаровой функции V_n позволяет дать простую геометрическую интерпретацию такому решению. Умножая уравнения системы (6) последовательно на x, y, z и складывая их, получаем с учетом формулы (4)

$$x\frac{\partial V_n}{\partial x} + y\frac{\partial V_n}{\partial y} + z\frac{\partial V_n}{\partial z} = \lambda, \tag{7}$$

т. е.

$$(\bar{r}, \operatorname{grad} V_n) = \lambda, \tag{8}$$

где $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ — радиус-вектор точки экстремума, а $\operatorname{grad} V_n$ — значение шаровой функции, вычисляемое в этой же точке. С другой стороны, поскольку левая часть формулы (7) входит в формулу Эйлера для однородных функций, запишем также

$$n \cdot V_n = \lambda. \tag{9}$$

Отсюда следует простой смысл множителей Лагранжа при решении обсуждаемой задачи: каждый из них равен произведению порядка шаровой функции на ее значение в соответствующей точке экстремума.

Умножая теперь уравнения (6) последовательно на орты координатных осей $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и складывая результаты, находим

$$\operatorname{grad} V_n = \lambda \bar{r}, \tag{10}$$

то есть в точках экстремумов сферических функций Y_n градиент $\operatorname{grad} V_n$ шаровых функций, связанных со сферическими соотношениями (2), коллинеарен радиусу-вектору $\bar{r}$.

Таким образом, нахождение точек экстремумов сферической функции Y_n требует определения собственных направлений векторной функции $\bar{g}_n = \operatorname{grad} \bar{V}_n$ от векторного аргумента $\bar{r}$

$$\bar{g}_n = \bar{g}_n(\bar{r}), \tag{11}$$

которые с учетом (6) легко получить из соотношений

$$\frac{1}{x}\frac{\partial V_n}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial V_n}{\partial y} = \frac{1}{z}\frac{\partial V_n}{\partial z}. \tag{12}$$

Перейдем к определению точек экстремумов сферических функций низших порядков.

§ 2. Потенциал *нулевого порядка*

$$V_0 = \frac{fM}{r} \tag{13}$$

(f — гравитационная постоянная; M — масса планеты), выражающий собой потенциал точечной массы M либо потенциал шара радиуса $R = 6371$ км, принимает на поверхности сферы постоянное значение fM, поэтому сферическая функция нулевого порядка $Y_0 = fM$ экстремумов не имеет.

Потенциал *первого порядка* на сфере $r = 1$ можно записать в виде *

$$V_1 = K(C_{11}x + S_{11}y + C_{10}z) = a_1x + a_2y + a_3z. \tag{14}$$

В соответствии с (6) получим соотношения **

$$a_1 = \lambda x_e;\ a_2 = \lambda y_e;\ a_3 = \lambda z_e, \tag{15}$$

в которых величины a_1, a_2, a_3 можно считать пропорциональными направляющим косинусам вектора $r(x_e, y_e, z_e)$ точки экстремума, поэтому, нормируя a_1, a_2, a_3, находим следующие выражения координат экстремумов сферической функции первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} x_e &= \pm\frac{C_{11}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{11}^2 + S_{11}^2}};\\ y_e &= \pm\frac{S_{11}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{11}^2 + S_{11}^2}};\\ z_e &= \pm\frac{C_{12}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{11}^2 + S_{11}^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

---

* Для Земли $K = fMa$, где a — экваториальный радиус планеты.

** Здесь x_e, y_e, z_e — прямоугольные координаты точек экстремумов.

Из полученных соотношений видно, что функция Y_1 имеет два экстремума, расположенных в антиподных точках — (x_e, y_e, z_e) и $(-x_e, -y_e, -z_e)$.

Запишем теперь максвеллово выражение V_1 [10, 3, 6], рассматривая его также на единичной сфере

$$V_1 = M_1(lx+my+nz), \tag{17}$$

где M_1 — момент; l, m, $n(l^2+m^2+n^2=1)$ — направляющие косинусы оси $\vec{h}_1$ гравитационного диполя или соответствующей ему сферической функции Y_1. Тогда

$$a_1 = M_1 l;\; a_2 = M_1 m;\; a_3 = M_1 n. \tag{18}$$

Нормируя a_1, a_2, a_3, получаем:

$$x_e = \pm l;\; y_e = \pm m;\; z_e = \pm n, \tag{19}$$

т. е. координаты экстремумов Y_1 совпадают с положениями полюса диполя и антиподной точки. Таким образом, получаем аналитическую интерпретацию оси $\vec{h}_1$ сферической функции первого порядка: она определяется прямой, соединяющей две точки экстремума этой функции. Сравнение коэффициентов при текущих координатах x, y, z в уравнениях (14) и (17) с учетом (16) приводит к выражению для момента Y_1 (диполя)

$$M_1 = fMa\sqrt{C_{10}^2 + C_{11}^2 + S_{11}^2}. \tag{20}$$

В совокупности с соотношениями (16) оно описывает все максвелловы параметры сферической функции 1-го порядка M_1, $\vec{h}_1$, координаты точек ее экстремумов и экстремальные значения функции $Y_1 (Y_1 = \lambda = \pm M_1)$.

Обращаясь к сферической функции 1-го порядка, описывающей гравитационный диполь Земли, скажем, что так как ее стоксовы постоянные C_{10}, C_{11}, S_{11} принято считать равными нулю (начало используемой системы координат совмещено с центром масс планеты), то в этом случае сферическая функция тождественно равна нулю, и вопрос об использовании полученных формул (16), (20) здесь не возникает.

§ 3. Потенциал *второго порядка*, рассматриваемый на единичной сфере, представляет собой квадратичную форму от переменных x, y, z:

$$V_2 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz, \tag{21}$$

коэффициенты которой могут быть выражены либо через стоксовы постоянные

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= fMa^2\left(3C_{22} - \frac{1}{2}C_{20}\right); & a_{12} &= fMa^2\, 3S_{22};\\ a_{22} &= -fMa^2\left(3C_{22} + \frac{1}{2}C_{20}\right); & a_{13} &= fMa^2\frac{3}{2}C_{21};\\ a_{33} &= fMa^2 C_{20}; & a_{23} &= fMa^2\frac{3}{2}S_{21}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

либо через максвелловы параметры функции Y_2

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \frac{M_2}{2}(3l_1l_2 - p); \quad a_{12} = \frac{M_2}{4}(3l_1m_2 + 3m_1l_2); \\ a_{22} &= \frac{M_2}{2}(3m_1m_2 - p); \quad a_{13} = \frac{M_2}{4}(3l_1n_2 + 3n_1l_2); \\ a_{33} &= \frac{M_2}{2}(3n_1n_2 - p); \quad a_{23} = \frac{M_2}{4}(3m_1n_2 + 3n_1m_2), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где M_2 — момент, а (l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2) — направляющие косинусы осей $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ гравитационного квадриполя или соответствующей ему сферической функции $Y_2 (l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1,\ i = 1,2)$, $p = \cos\varphi$, φ — угол между осями квадриполя.

Составляя уравнения типа (6) для квадратичной формы (21), после некоторых преобразований получим систему линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y + a_{13}z &= 0; \\ a_{12}x + (a_{22} - \lambda)y + a_{23}z &= 0; \\ a_{13}x + a_{23}y + (a_{33} - \lambda)z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

в которой множители Лагранжа λ соответствуют уменьшенным вдвое множителям системы (6) и для удобства не заменялись в (24) каким-либо другим символом.

Замечаем теперь, что нахождение λ идентично задаче определения собственных значений квадратичной формы (21), а нахождение координат экстремумов — задаче определения собственных векторов формы (21). Обратимся поэтому к известному приему нахождения собственных значений и собственных векторов квадратичной формы [1]. Поскольку в общем случае x, y, z в (24) отличны от нуля, то определитель этой системы должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Отсюда имеем характеристическое уравнение для определения λ

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{26}$$

где

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33}; \\ I_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \\ I_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

инварианты квадратичной формы (21). С учетом (22) получим

$$\left.\begin{aligned}
&I_1 = 0;\\
&I_2 = -\frac{3}{4}(fMa^2)^2\cdot(C_{20}^2 + 3\,C_{21}^2 + 3\,S_{21}^2 + 36\,C_{22}^2 + 36\,S_{22}^2;\\
&I_3 = \frac{1}{8}(fMa^2)^3(2\,C_{20}^3 - 72\,C_{22}^2\,C_{20} + 108\,C_{21}S_{21}S_{22} - 72\,S_{22}^2C_{20} +\\
&\qquad + 54\,C_{21}^2C_{22} + 9\,C_{21}^2\,C_{20} - 54\,S_{21}^2C_{22} + 9\,S_{21}^2\,C_{20}),
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

а в случае стоксовых постоянных Земли ($C_{21}=S_{21}=0$)

$$\left.\begin{aligned}
&I_2 = -\frac{3}{4}(fMa^2)^2\cdot(C_{20}^2 + 36\,C_{22}^2 + 36\,S_{22}^2);\\
&I_3 = \frac{C_{20}}{4}(fMa^2)^3\cdot(C_{20}^2 - 36\,C_{22}^2 - 36\,S_{22}^2).
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Таким образом, кубическое уравнение (26) принимает следующий вид:

$$\lambda^3 + I_2\lambda - I_3 = 0. \tag{30}$$

Подстановка сюда значений I_2 и I_3, выраженных через стоксовы постоянные (29), не позволяет в общем виде найти корни этого уравнения. Использование же записи I_2 и I_3 с учетом (23) через максвелловы параметры

$$\left.\begin{aligned}
&I_2 = -\frac{3}{16}(M_2)^2\cdot(3 + p^2);\\
&I_3 = \frac{M_2 p}{2}\cdot\frac{M_2\,(3-p)}{4}\cdot\frac{M_2\,(3+p)}{4}
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

дает возможность заметить, что сомножители для I_3 (31), взятые с определенной комбинацией знаков, удовлетворяют условиям, которым подчинены корни уравнения (30)

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0;\\
&\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = I_2;\\
&\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = I_3.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Поэтому корни характеристического уравнения (30), являющиеся собственными значениями квадратичной формы (21), это:

$$\lambda_1 = \frac{M_2\,(3+p)}{4};\;\; \lambda_2 = -\frac{M_2 p}{2};\;\; \lambda_3 = -\frac{M_2\,(3-p)}{4}. \tag{33}$$

Значит, для определения направляющих косинусов собственных векторов (21) необходимо решить следующую однородную систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_i x_i+ \quad a_{12}y_i+ \quad a_{13}z_i=0;\\ a_{12}x_i+(a_{22}-\lambda_i)\,y_i+ \quad a_{23}z_i=0;\\ a_{13}x_i+ \quad a_{23}y_i+(a_{33}-\lambda_1)\,z_i=0,\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

определитель которой равен нулю, а система имеет бесконечное множество решений. Привлечение равенства (4) в качестве дополнительного условия позволяет, однако, получить единственное решение в виде

$$\left.\begin{aligned}x_i&=\pm\frac{\Delta_1^i}{\sqrt{(\Delta_1^i)^2+(\Delta_2^i)^2+(\Delta_3^i)^2}};\\ y_i&=\pm\frac{\Delta_2^i}{\sqrt{(\Delta_1^i)^2+(\Delta_2^i)^2+(\Delta_3^i)^2}};\\ z_i&=\pm\frac{\Delta_3^i}{\sqrt{(\Delta_2^i)^2+(\Delta_2^i)^2+(\Delta_3^i)^2}},\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

где $\Delta_1^i=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22}-\lambda_i & a_{23}\end{vmatrix}$; $\Delta_1^i=\begin{vmatrix}a_{13} & a_{11}-\lambda_i\\ a_{23} & a_{12}\end{vmatrix}$; $\Delta_3^i=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda_i & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda_i\end{vmatrix}$ (36)

Соотношения (35) довольно громоздки для нахождения величин x_i, y_i, z_i. Используя же свойства симметрии определителя системы (34) [9], можно получить решение в более простом виде, формально совпадающем с выражениями для направляющих косинусов собственных векторов квадратичной формы, описывающей потенциал геомагнитного мультиполя второго порядка

$$x_i^2=\frac{A_{11}^i}{\mu_i};\quad y_i^2=\frac{A_{22}^i}{\mu_i};\quad z_i^2=\frac{A_{33}^i}{\mu_i};\quad \mu_i=A_{11}^i+A_{22}^i+A_{23}^i, \tag{37}$$

где величины A_{11}^i, A_{22}^i, A_{33}^i являются алгебраическими дополнениями соответственно элементов $(a_{11}-\lambda_i)$, $(a_{22}-\lambda_i)$, $(a_{33}-\lambda_i)$ в определителе системы уравнений (34). Подставляя в (37) значения A_{11}^i, A_{22}^i, A_{33}^i, выраженные через максвелловы параметры, можно прийти [8] к следующим соотношениям для направляющих косинусов собственных векторов формы (21)

$$\left.\begin{aligned}&x_1=\pm\frac{l_1+l_2}{2C};\quad y_2=\pm\frac{m_1+m_2}{2C};\quad z_1=\pm\frac{n_1+n_2}{2C};\\ &x_2=\pm\frac{m_1n_2-m_2n_1}{2CS};\quad y_2=\pm\frac{n_1l_2-l_1n_2}{2CS};\quad z_2=\pm\frac{l_1m_2-l_2m_1}{2CS};\\ &x_3=\pm\frac{l_1-l_2}{2S};\quad y_3=\pm\frac{m_1-m_2}{2S};\quad z_3=\pm\frac{n_1-n_2}{2S},\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

где C — косинус, а S — синус половины угла φ между осями Y_2 (квадриполя). Как из формул (35), так и из выражений (38) видно, что сферическая функция 2-го порядка имеет шесть экстремумов, причем в экстремальных точках (x_i, y_i, z_i) и $(-x_i, -y_i, -z_i)$ функция Y_2 принимает значения $\frac{\lambda_i}{4}$. Кроме того, согласно (38) точки экстремумов с координатами $\pm(x_1, y_1, z_1)$ и $\pm(x_3, y_3, z_3)$ лежат в плоскости осей Y_2 (квадриполя): первые две — на биссектрисе угла φ между осями Y_2, вторые две — на биссектрисе угла $(180°-\varphi)$. Две прямые, определяемые этими точками, взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости осей Y_2 (квадриполя). Проводя теперь линию через точки экстремумов с координатами $\pm(x_2, y_2, z_2)$ (перпендикулярно плоскости осей Y_2), образуем тройку взаимно перпендикулярных прямых, принимая которые в качестве новой системы координат OXYZ, запишем квадратичную форму (21) (с учетом того, что X, Y, Z — собственные направления этой формы) в каноническом виде

$$V_2=\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+\lambda_3 Z^2. \tag{39}$$

Заметим, однако, что если в качестве системы прямоугольных координат принять систему главных осей инерции планеты, то (см. напр. [2, 4])

$$V_2=\frac{1}{2} fMa^2[(B+C-2A)X^2+(A+C-2B)Y^2+(A+B-2C)Z^2], \tag{40}$$

где A, B, C — безразмерные главные моменты инерции планеты $A<B<C$.

Сравнив теперь (39) и (40), приходим к следующим величинам собственных значений формы (21), выраженных через главные моменты инерции:

$$\lambda_1=\frac{1}{2} fMa^2(B+C-2A);\ \ \lambda_2=\frac{1}{2} fMa^2(A+C-2B);$$

$$\lambda_3=\frac{1}{2} fMa^2(A+B-2C). \tag{41}$$

Таким образом, задача определения координат экстремумов сферической функции 2-го порядка Y_2 идентична задаче нахождения направляющих косинусов собственных векторов квадратичной формы Y_2, рассматриваемой на единичной сфере. Тот факт, что направления собственных векторов совпадают с главными осями инерции планеты, позволяет применить формулы (38) для определения направлений главных осей инерции относительно используемой декартовой системы координат x, y, z и заключить, что оси наибольшего и наименьшего моментов инерции планеты всегда лежат в плоскости осей ее квадриполя. Причем ось наименьшего момента инерции является биссектрисой угла между осями квадриполя, а остальные две оси дополняют первую до тройки взаимно перпендикулярных прямых.

Сравнение выражений (33) и (41) дает возможность получить следующие соотношения:

$$M_2 = fMa^2(C - A); \ \cos\varphi = 1 - 2\frac{C-B}{C-A}, \tag{42}$$

устанавливающие связь между главными моментами инерции и максвелловыми параметрами сферической функции 2-го порядка. Таким образом, параллельно с использованием трех фундаментальных параметров A, B, C, определяющих эллипсоид инерции планеты, можно привлекать и максвелловы инвариантные постоянные M_2, φ, также связанные с эллипсоидом инерции Земли. Поэтому выражение для потенциала Земли 2-го порядка (или потенциала квадриполя) в системе координат главных осей инерции X, Y, Z может быть записано также и с максвелловыми константами

$$V_2 = \frac{M_2}{2r^5}\left[\frac{3+\cos\varphi}{2}X^2 - \cos\varphi Y^2 - \frac{3-\cos\varphi}{2}Z^2\right], \tag{43}$$

причем, положение главных осей X, Y, Z относительно исходной системы координат x, y, z, в которой известны направления осей квадриполя Земли, определено с помощью формул (38).

Обсужденная здесь методика нахождения точек экстремумов и экстремальных значений функции Y_2, описывающей гравитационный квадриполь Земли, может быть использована и при исследовании экстремальных свойств сферической функции 2-го порядка общего вида.

Список литературы: 1. *Акивис М. А., Гольдберг В. В.* Тензорное исчисление. М., «Наука», 1969, 351 с. 2. *Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимберев Б. П.* Теория фигуры Земли. М., Изд-во геодезической литературы, 1961, 256 с. 3. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. Л., «Иностранная литература», 1952, 476 с. 4. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М., «Наука», 1975, 799 с. 5. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М., «Высшая школа», 1970, 710 с. 6. *Мещеряков Г. А.* О мультипольном представлении гравитационного потенциала. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, № 19, с. 63. 7. *Мещеряков Г. А., Марченко А. Н.* Мультипольное истолкование основных особенностей фигуры геоида. — «Геодезия и картография», 1976, № 6, 14. с. 8. *Kilczer G.* Die geometrische. Structur des erdmagnetischen Quadrupolmoment—Tensors— «Gerlands Beiträge zur Geophysik», 1964, в. 73, 290 р. 9. *Kommerell K.* Vorlesungen über analytishe Geometrie des Raumes. Leipzig, 1953. 10. *Maxwell G. I.* A treatise on Electricity and Magnetism. V. 1, 2 nd edition. Oxford, 1881, 214 p.

Работа поступила в редколлегию 25 ноября 1976 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.