РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 17

УДК 528.21:551.1:681.3

А. В. ГОЛИКОВА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ В ЕЕ ТЕЛЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

В работе [2] была показана возможность количественной оценки наличия горизонтальных неоднородностей в теле Земли. Идея указанного метода заключается в вычислении по внешнему гравитационному потенциалу плотностей вещества внутри Земли, средних для пирамид с вершинами в центре масс планеты и со сферическими основаниями на ее поверхности, соответствующими заранее выбранным частям материков и океанов, и в сравнении этих плотностей друг с другом. Наличие горизонтальных неоднородностей в теле Земли подтверждается найденными в [2] расхождениями в значениях указанных плотностей. Однако в работе подчеркивался предварительный характер полученных численных результатов.

Мы даем более строгое решение этой задачи, используя более надежные значения постоянных Стокса и вычисляя коэффициенты системы уравнений непосредственным интегрированием по сфере.

Для решения задачи Земля была разбита на 25 пирамид, основаниями которых являются отдельные части материков и океанов. Разбивка областей на земной поверхности производилась по трапециям $10^\circ \times 10^\circ$. Для определения средних плотностей вещества внутри каждой пирамиды было составлено 25 уравнений с 25 неизвестными. Коэффициенты этих уравнений находились следующим образом.

Как известно, постоянные Стокса определяются выражениями [1]:

$$\left.\begin{matrix} c_{mn} \\ s_{mn} \end{matrix}\right\} = \frac{\nu_{mn}}{Ma^m} \int\limits_{\tau} \delta r^m P_{mn}(\cos\theta) \begin{cases} \cos n\lambda \\ \sin n\lambda \end{cases} d\tau, \tag{1}$$

где M — масса Земли; a — большая полуось земного эллипсоида; δ — плотность вещества; $\nu_{m0}=1$, $\nu_{mn}=2\dfrac{(m-n)!}{(m+n)!}$. Используемые постоянные Стокса (1) от нулевого до четвертого порядка были пронумерованы определенным образом. Объем Земли τ был разбит на 25 частичных подобъемов τ_j, причем $\tau=\sum\limits_{j=1}^{25}\tau_j$. Учитывая, что $d\tau=r^2\sin\theta d\theta d\lambda dr$, из (1) имеем

$$\left.\begin{matrix} c_{mn} \\ s_{mn} \end{matrix}\right\} = \frac{\nu_{mn}}{Ma^m} \int\limits_0^R r^{m+2} dr \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \delta P_{mn}(\cos\theta)\sin\theta \begin{cases} \cos n\lambda \\ \sin n\lambda \end{cases} d\theta d\lambda.$$

Считая внутри каждого τ_j плотность $\delta = \text{const} = \delta_j$, получим из каждой постоянной Стокса линейное уравнение относительно δ_j:

$$\sum_{j=1}^{25} \delta_j \sigma_{ij} = \frac{m+3}{R^{m+3}} \; \frac{Ma^m}{\nu_{mn}} \begin{cases} c_{mn}, \\ s_{mn} \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\omega_j} P_{mn}(\cos\theta)\cos n\lambda\, d\omega \text{ при } c_{mn}, \\ \displaystyle\int\limits_{\omega_j} P_{mn}(\cos\theta)\sin n\lambda\, d\omega \text{ при } s_{mn}. \end{cases}$$

Здесь ω — единичная сфера; $d\omega = \sin\theta d\theta d\lambda$, а ω_j — площадь той части ω, которая вырезается из нее j-й пирамидой.

Взяв 25 соотношений (2), получим систему из 25 уравнений с 25 неизвестными

$$\sum_{j=1}^{25} \sigma_{ij}\delta_j = L_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 25), \tag{3}$$

которая и решает задачу нахождения средних плотностей δ_j.

Для иллюстрации методики расчета коэффициентов системы, найдем к примеру коэффициент σ_{15j}, соответствующий стоксовой постоянной c_{32}. Так как

$$P_{32} = 15\sin^2\theta\cos\theta = -\frac{15}{4}(\cos 3\theta - \cos\theta),$$

то

$$\sigma_{15j} = -\frac{15}{4}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}(\cos 3\theta - \cos\theta)\sin\theta\, d\theta \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\cos 2\lambda\, d\lambda.$$

Интегрируя, получаем:

$$\sigma_{15j} = \frac{15}{16}\Big[4\sin(\theta_2+\theta_1)\sin(\theta_2-\theta_1) - \sin 2(\theta_2+\theta_1)\sin 2(\theta_2-\theta_1)\Big] \times$$
$$\times \cos(\lambda_2+\lambda_1)\sin(\lambda_2-\lambda_1).$$

Аналогично находим и все остальные коэффициенты σ_{ij}. Для контроля составления коэффициентов σ_{ij} были использованы соотношения

$$\sum_{j=1}^{25} \sigma_{1j} = 4\pi, \quad \sum_{j=1}^{j=25} \sigma_{ij} = 0, \quad i > 1. \tag{4}$$

Для вычисления свободных членов L_i уравнений приняли следующие значения параметров [3]:

$$fM = 398600{,}9\cdot 10^9 \ \frac{м^3}{сек^2}, \quad f = 6{,}673\cdot 10^{-8} \ \frac{м^3}{т\, сек^2}, \quad a = 6378142 \ м,$$

$$c_{10}=c_{11}=c_{21}=s_{11}=s_{21}=0; \quad \alpha=\frac{1}{298{,}255}$$
$$c_{20}=-1082{,}639^{*};$$

$$\begin{aligned}
&c_{30}=2{,}565; && \bar{s}_{22}=-1{,}35;\\
&c_{40}=1{,}608; && \bar{s}_{31}=0{,}25;\\
&\bar{c}_{22}=2{,}38; && \bar{s}_{32}=-0{,}51;\\
&\bar{c}_{31}=1{,}71; && \bar{s}_{33}=1{,}43;\\
&\bar{c}_{32}=0{,}84; && \bar{s}_{41}=-0{,}39;\\
&\bar{c}_{33}=0{,}66; && \bar{s}_{42}=0{,}48;\\
&\bar{c}_{41}=-0{,}47; && \bar{s}_{43}=-0{,}24;\\
&\bar{c}_{42}=0{,}35; && \bar{s}_{44}=0{,}30.\\
&\bar{c}_{43}=0{,}92; && \\
&\bar{c}_{44}=0{,}04; &&
\end{aligned} \tag{5}$$

Так как среди (5) имеются постоянные Стокса нормированные, обозначенные чертой сверху, и ненормированные, то потребовалось осуществить переход от одних к другим по известной формуле

$$\left.\begin{matrix} c_{mn} \\ s_{mn} \end{matrix}\right\} = \sqrt{2(2m+1)\frac{(m-n)!}{(m+n)!}} \left\{\begin{matrix} \bar{c}_{mn}, \\ \bar{s}_{mn} \end{matrix}\right.$$

ибо системой (3) предусмотрено использование только ненормированных гармоник. Решения системы (3) выполнялись несколько раз при различных ω_j. При этом была выявлена сильная зависимость находимых δ_j от коэффициентов σ_{ij}, что может быть следствием плохой обусловленности матрицы системы (3). В результате анализа вычисления приводим наиболее вероятные значения δ_j (см. таблицу). Следует

Наиболее вероятные значения δ_j

№ пирамид	Расположение оснований пирамид	Число секторов	$\frac{\delta_j}{\delta_{ср}}$	δ_j
	Северное полушарие			
1	Африка	21	1,010	5,569
2	Атлантический океан	29	1,002	5,525
3	Центральная и Южная Америка	12	1,018	5,613
4	Европа	18	0,968	5,338
5	Северная Америка	44	0,984	5,426
6	Тихий океан, западная часть	24	1,008	5,558
7	Северный Ледовитый океан	59	1,025	5,652
8	Тихий океан, восточная часть	22	1,006	5,547
9	Индийский океан	10	0,993	5,475
10	Южная Азия	23	1,012	5,580
16	Тихий океан, средняя часть	24	1,001	5,520
12	Азия, восточная часть	19	0,961	5,299
0	Азия, западная часть	19	1,003	5,530
	Южное полушарие			
11	Австралия	13	0,998	5,503
13	Африка	9	1,002	5,525
14	Южная Америка	17	0,995	5,486
15	Антарктида	64	0,972	5,360
17	Индийский океан, западная часть	36	1,004	5,536
18	Индийский океан, восточная часть	33	1,004	5,536
19	Тихий океан, северо-западная часть	18	1,003	5,530
20	Тихий океан, средняя часть	29	1,001	5,520
21	Тихий океан, юго-восточная часть	31	0,999	5,508
22	Атлантический океан, западная часть	31	1,007	5,552
23	Атлантический океан, восточная часть	18	0,992	5,470
24	Тихий океан, восточная часть	25	1,000	5,514

* Эта и последующие величины умножаются на 10^{-6}.

отметить, что здесь в отличие от [2] разбивка поверхности Земли на десятиградусные трапеции осуществлялась не по разграфке Жонголовича, а строго через 10° по широте от экватора в обе стороны и по долготе от гринвического меридиана.

В начале вычислений была получена средняя плотность Земли $\delta_{ср}=5{,}514\,\frac{г}{см^3}$.

Как видно из таблицы, значения средних плотностей δ_j внутри ω_j не равны соответствующим им из [2], хотя полного тождества здесь и нельзя ожидать ввиду отмеченного несовпадения областей ω_j.

Анализ вычислений показывает, что полученные результаты также не могут считаться окончательными, и возникает необходимость либо в детальном исследовании матрицы системы [3] на ее обусловленность, либо в выборе иной методики отыскания горизонтальных неоднородностей в теле Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жонголович И. Д. Потенциал земного притяжения. Бюлл. ИТА, VI, № 8 (81). М.—Л., Изд-во АН СССР, 1957.

2. Мещеряков Г. А. О наличии горизонтальных неоднородностей в теле Земли. — Изв. АН СССР. «Физика Земли», № 3. М., Изд-во АН СССР, 1970.

3. Стандартная Земля. Геодезические параметры Земли на 1966 г. (перевод с английского). М., «Мир», 1969.

Работа поступила в редколлегию 21 апреля 1971 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского ордена Ленина политехнического института.