РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 17

УДК 525.12

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ

ОБ ОЦЕНКЕ НЕКОТОРЫХ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ВНУТРЕННЕЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

В изучении гравитационного поля Земли в наше время достигнуты большие успехи, особенно это касается внешнего гравитационного поля. Внутреннее поле Земли по ряду очевидных причин труднее поддается изучению, хотя любые сведения о нем несут в себе довольно большую по объему и важную по своей значимости информацию о нашей планете. Например, уточнение модели строения Земли и в первую очередь установление строгого закона распределения плотности $\delta(Q)$ земных недр эквивалентно задаче нахождения внутреннего гравитационного потенциала Земли

$$V(Q)=f\int_{\tau}\frac{\delta_P}{r_{QP}}d\tau_P, \qquad Q,\ P\in\tau, \tag{1}$$

ибо лапласиан последнего, вычисленный во внутренней точке Земли, дает, по сути дела, плотность $\delta(Q)$ вещества в указанной точке. При этом принципиальное значение имеет тот факт, что функция $V(Q)$ непрерывна даже при разрывной плотности (а принадлежность δ классу кусочно непрерывных функций следует из данных сейсмологии), значит, в классе обобщенных функций произведение $\delta(Q)$, находимое из уравнения Пуассона, может дать нам нужное решение.

О внутреннем гравитационном поле Земли написан ряд фундаментальных работ [3, 6, 8, 10, 11], но почти все они ограничены предположением о гидростатическом состоянии вещества внутри планеты. Однако результаты исследований последних лет позволяют дать оценку некоторых величин, характеризующих внутреннее гравитационное поле Земли с минимум тех или иных гипотез на основе более или менее твердо установленных положений.

Мы вычислим наименьшее и наибольшее значения потенциала (1), его среднее интегральное значение, а также энергию гравитационного поля Земли.

Землю можно принять за шар, равновеликий по объему нашей планете, однако, все величины, ее описывающие, следует брать в соответствии с данными [15], которые отражают современное представление о фигуре и гравитационном поле Земли *:

$$a=6\,378\,142\ \textit{м};\ \alpha=1:298{,}255;$$

$$fM=398\,600,\ 9\cdot10^9\ \textit{м}^3\ \textit{сек}^{-2};\ I_2=1{,}082\ 639\cdot10^{-3}.$$

Принимая Землю за шар, полагаем

$$R=a\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)=6\,371\,012\ \textit{м}. \tag{2}$$

* Здесь и далее мы пользуемся обозначениями величин, принятыми в отечественной литературе: [1], [11] и др.

Угловую скорость вращения Земли ω считаем известной

$$\omega^2 = 5{,}31\ 749 \cdot 10^{-9}\ сек^{-2}.$$

Полагаем также известными главные моменты инерции Земли A, B, C относительно осей, Ox, Oy, Oz, последняя из которых направлена в средний полюс 1900—1905 гг., а начало системы координат совмещено с центром масс планеты $(C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0)$, так как при твердо полученной в астрономии величине постоянной прецессии

$$H = \frac{C - \frac{1}{2}(A + B)}{C} = 0{,}00327237$$

имеем известное соотношение [11]

$$C = \frac{1}{H} M a^2 I_2.$$

Последнее с целью аннулирования потери точности за счет неуверенного знания гравитационной постоянной [14]

$$f = 0{,}6673 \cdot 10^{-7}\ м^3\ т^{-1}\ сек^{-2},$$

лучше брать в виде

$$fC = \frac{1}{H}(fM)\, a^2 I_2. \tag{3}$$

Выведем формулу для вычисления среднего интегрального значения $V_{ср}$ гравитационного потенциала Земли внутри ее объема

$$V_{ср} = \frac{1}{\tau}\int\limits_{\tau} V\, d\tau. \tag{4}$$

Воспользуемся теоремой о среднем значении для решения уравнения Пауссона $\Delta V = -4\pi f \delta$ (см. [7, стр. 235]), применяя ее к шару радиуса R. Тогда получим для потенциала в центре шара

$$V(O) = \frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_{\tau} V\, d\tau + \frac{f}{2R^3}\int\limits_{\tau} \frac{(R-\rho)^2(2R+\rho)}{\rho}\, \delta\, d\tau,$$

здесь ρ — расстояние текущей точки (интегрирования) от центра шара: $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Но $$\int\limits_{\tau} \frac{(R-\rho)^2(2R+\rho)}{\rho}\, \delta\, d\tau = 2R^3 V(O) - 3R^2 M + \int\limits_{\tau} \delta \rho^2\, d\tau,$$

где $M = \int_\tau \delta d\tau$. Значит, теорема о среднем значении позволяет написать

$$V_{ср} = \frac{3fM}{2R} - \frac{f}{2R^3}\int\limits_{\tau} \delta \rho^2\, d\tau.$$

Из теоретической механики известно, что $\int\limits_{\tau} \delta(x^2 + y^2 + z^2)\, d\tau = \frac{1}{2}(A + B + C)$, потому

$$V_{ср} = \frac{3fM}{2R} - \frac{1}{4R^3}(fA + fB + fC). \tag{5}$$

Вспоминая [1] механическое значение стоксовых постоянных второго порядка

$$C_{20} = f\left(\frac{A+B}{2} - C\right), \qquad C_{22} = \frac{f}{4}(B - A),$$

легко получаем

$$fA+fB+fC=3fC+2C_{20},$$

где $C_{20}=-I_2$, а fC в правой части последнего равенства может быть заменено его значением по формуле (3). В результате будем иметь

$$fA+fB+fC=\frac{3-2H}{H}fMa^2I_2,$$

что с учетом (2) позволяет записать формулу (5) в окончательном виде

$$V_{\text{ср}}=\frac{fM}{2a}\left[3+\alpha+(1+\alpha)\left(1-\frac{3}{2H}\right)I_2\right]. \qquad (6)$$

Подсчет по этой формуле на основе числовых значений параметров Земли, приведенных выше, дает следующий результат:

$$V_{\text{ср}}=78322000\ м^2\ сек^{-2}.$$

Теперь можно легко найти и среднее значение потенциала силы тяжести, для чего надо к полученной величине добавить среднее интегральное значение потенциала центробежной силы, а именно

$$\frac{3}{4\pi R^3}\int_\tau\frac{\omega^2}{2}\rho^2\cos^2\varphi\,d\tau=\frac{3}{4\pi R^3}\cdot\frac{4\pi}{15}\omega^2R^5=\frac{1}{3}\omega^2R^2=71945\ м^2сек^{-2}.$$

Таким образом,

$$W_{\text{ср}}=78394000\ м^2\ сек^{-2}.$$

Одной из характеристик внутреннего гравитационного поля Земли мы назвали в начале статьи наименьшее значение $V_{\min}$ потенциала этого поля. По известному свойству супергармонических функций, к каковым относится потенциал притяжения, рассматриваемый внутри притягивающих масс, $V(Q)$ не имеет минимума внутри планеты. Поэтому величина $V_{\min}$, трактуемая как характеристика внешнего гравитационного поля, может быть легко найдена, коль скоро определена физическая поверхность Земли и ее внешнее гравитационное поле по теории М. С. Молоденского. Согласно последней в точках земной поверхности определяется возмущающий потенциал T (см. [1]), а следовательно, может быть вычислен потенциал силы тяжести W и потенциал притяжения V и найдены их наименьшие значения на поверхности Земли. Однако решением задачи Молоденского в глобальных масштабах мы до сих пор не располагаем (хотя бы из-за «пятен» в мировой гравиметрической съемке), поэтому приходится строгое определение $V_{\min}$ и $W_{\min}$ заменить приближенным, найдя W_0 на поверхности уровенного эллипсоида, наилучшим образом подходящего к Земле, и перенести это значение в наиболее удаленную от центра масс Земли точку ее поверхности.

Определим значение W_0 потенциала силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида Стандартной Земли, параметрами которого здесь пользуемся, ибо в [15] отсутствует нужная нам формула, а применять какие-либо другие известные формулы нормального распределения, см. хотя бы [1], не имеет смысла, так как это нарушило бы единообразие системы используемых и получаемых величин.

Нормальный потенциал U силы тяжести уровенного эллипсоида в [15] взят в виде

$$U=\frac{fM}{r_e}\left[1+K_2\left(\frac{a}{r_e}\right)^2P_{20}(\sin\varphi)+K_4\left(\frac{a}{r_e}\right)^4P_{40}(\sin\varphi)\right]+\frac{\omega^2}{2}r_e^2\cos^2\varphi,$$

где φ — геоцентрическая широта; r_e — расстояние от центра эллипсоида; P_{20} и P_{40} — зональные сферические функции второго и четвертого порядков; $K_2 = C_{20}$; $K_4 = \frac{e'^2}{35}\left(e'^2 - 18K_2 - \frac{4a^3\omega^2}{fM}\right)$; $e'^2 = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 - 1$; α — сжатие сферопов.

При $U_0 = W_0$ геоцентрический радиус-вектор точек меридианного эллипса r_e дается формулой

$$r_e = \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi}},$$

а α имеет приведенное ранее числовое значение. Причем именно эта величина сжатия эллипсоида и указанное выше значение коэффициента K_4 подобраны В. Кенлейном в [15] так, чтобы для точек эллипсоида выражение U после подстановки в него значений P_{20}, P_{40} и r_e приняло бы вид

$$U = u_0 + u_2 \sin^2 \varphi + u_4 \sin^4 \varphi,$$

где $u_2 = u_4 = 0$.

Остается найти интересующее нас u_0, дающее W_0. Последнее после преобразований можно записать в виде

$$W_0 = \frac{fM}{a}\left[1 + \frac{1}{2} I_2 + \frac{3}{280} e'^2 \left(e'^2 + 18 I_2 - \frac{4a^3\omega^2}{fM}\right)\right] + \frac{\omega^2}{2} a^2, \qquad (7)$$

или с незначительной потерей в точности —

$$W_0 = \frac{fM}{a}\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{27}{35}\alpha + \frac{81}{70}\alpha^2\right) I_2\right] + \frac{\omega^2}{2} a^2. \qquad (8)$$

Таково значение нормального потенциала силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида Стандартной Земли, таково же значение потенциала силы тяжести на геоиде.

Выполняя вычисления, находим

$$W_0 = 62636900 \text{ м}^2 \text{ сек}^{-2}.$$

Для сравнения приведем значение W_0, полученное в 1956 г. И. Д. Жонголовичем [4] для регулязированного геоида: 62639000 $м^2$ $сек^{-2}$.

Зная потенциал силы тяжести W на поверхности земного шара радиуса R (см. формулу (2)), легко было бы получить искомое распределение на основании известных свойств потенциала, но останавливаться на этом мы не будем.

Возвращаясь к вопросу о наименьшем значении потенциала на земной поверхности, берем в качестве наиболее удаленной точки от центра масс Земли вершину горы Джомолунгма (Эверест) с высотой $H = 8880$ $м$, $\zeta = -65$ $м$, $\varphi = 28°$. Вычисляя заведомо приближенное значение W_{min} в этой точке, воспользуемся только редукцией в свободном воздухе для нормального поля; тогда получим 62549872 $м^2$ $сек^{-2}$. Теперь полагаем

$$W_{min} = 62549000 \text{ м}^2 \text{ сек}^{-2}.$$

Наименьшее значение потенциала притяжения определим, исключив отсюда величину потенциала центробежной силы для рассматриваемой точки, равную 84448 $м^2$ $сек^{-2}$. Значит,

$$V_{min} = 62464000 \text{ м}^2 \text{ сек}^{-2}.$$

Найденные выше характеристики гравитационного поля Земли в принципе могут быть получены совершенно строго, то есть, без привлечения каких-либо гипотез или предположений о внутреннем строении планеты и на основании только тех величин, которые поддаются измерению. Перейдем теперь к рассмотрению величин, для оценки которых необходимы (пока еще необходимы!) подробные данные о распределении плотности внутри Земли. К таким величинам относятся: максимальное значение потенциала внутри планеты и гравитационная энергия ее. Однако кроме них, имеет смысл получить еще одну величину, полезную при решении ряда вопросов, а именно норму плотности $\|\delta\|$, вводимую следующим образом:

$$\|\delta\| = \left(\int_\tau \delta^2\, d\tau\right)^{1/2}. \qquad (9)$$

Было бы желательно определить данную величину, не прибегая к законам распределения δ внутри Земли, но пока это невозможно. Вот почему получим норму плотности на основе наиболее правдоподобной в настояще время модели строения Земли «А» Буллена—Гутенберга [11, 13]. Для этого найдем численным методом величину интеграла

$$\int_\tau \delta^2 d\tau = 4\pi R^3 \int_0^1 \delta^2\rho^2\, d\rho = 4\pi R^3 \left[\sum_{i=1}^{7}\left(\frac{\delta_i+\delta_{i+1}}{2}\right)^2\left(\frac{\rho_i+\rho_{i+1}}{2}\right)^2(\rho_{i+1}-\rho_i) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=8}^{21}\left(\frac{\delta_i+\delta_{i+1}}{2}\right)^2\left(\frac{\rho_i+\rho_{i+1}}{2}\right)^2(\rho_{i+1}-\rho_i)\right],$$

$\left(\text{здесь } \rho=\dfrac{r}{R}\right)$, в котором значению ρ_8 (граница: ядро—мантия) соответствуют два значения плотности ($\delta_8^1=9{,}40$ и $\delta_8''=5{,}69$), учитываемые последовательно первой и второй суммами.

В результате счета получено

$$\|\delta\| = 1947\cdot10^8 м^{-3/2} m^1 = 2\cdot10^{11}.$$

Норма плотности была вычислена еще три раза — применительно к более грубым моделям Земли: 1) предполагалось, что Земля — однородная; 2) предполагалось, что Земля состоит из конусов различной средней плотности [12]; 3) с применением другого (приближенного) способа вычисления интеграла. Не останавливаясь на описании этих подсчетов, укажем лишь формулы счета и результаты

1) $\|\delta\| = \delta_{ср}\sqrt{\tau} = 181\cdot10^9;$

2) $\|\delta\| = \dfrac{2\pi R^3}{615}\sum\limits_{i=1}^{23} n_i\delta_2^i = 181\cdot10^9$

(n_i — число десятиградусных секторов Жонголовича в основании конуса с номером i);

3) $\|\delta\| = \dfrac{M}{\sqrt{\tau}} = 183\cdot10^9.$

Приведенные данные ясно показывают характер изменения нормы плотности при переходе от грубых моделей к более совершенным, и если учесть большую правдоподобность модели «А» — Буллена—Гутенберга, то с большой уверенностью можно принять для условий Земли

$$\|\delta\| = 2\cdot10^{11}\ м^{-3/2} m^1.$$

Указанное значение $\|\delta\|$ несколько завышено по сравнению с вычисленным, однако, это вполне допустимо, так как норма плотности нужна в основном для оценки величин сверху.

Если бы для какого-нибудь тела τ известной формы, но неизвестной плотности δ была бы задана только норма плотности $\|\delta\|$, то одной этой величины было бы достаточно для оценки сверху потенциала притяжения этого тела на любую точку (внешнюю или внутреннюю — безразлично). Действительно, применение неравенства Коши—Буняковского к потенциалу (1) дает оценку

$$|V(Q)| = \left| f \int_\tau \frac{\delta_P}{r_{QP}} d\tau_P \right| \leqslant f \|\delta\| \left(\int_\tau \frac{1}{r^2_{QP}} d\tau_P \right)^{1/2}, \qquad (10)$$

интеграл в правой части которой можно считать известным, если указана точка Q и известна σ — граница тела τ.

Пользуясь неравенством (10), оценим потенциал притяжения земного шара на его центр. В этом случае получим

$$V(O) \leqslant 2f \|\delta\| \sqrt{\pi} R.$$

Числовой подсчет приводит к результату

$$V(O) = W(O) \leqslant 116250000 \text{ м}^2 \text{ сек}^{-2}.$$

Исходя из свойства ньютоновского потенциала шара [5], имеющего слоистую структуру, согласно которому V достигает максимума в центре шара, и учитывая, что в первом приближении Земля имеет именно такое строение, будем считать, что $V_{\max} = V(O)$, то есть, что последняя оценка справедлива и для максимального значения гравитационного потенциала Земли.

Отметим, наконец, что использование известных теорем [5], [12], дающих оценку ньютоновского потенциала, в нашем случае было невыгодным, ибо оно завышало бы их в несколько раз, поэтому здесь оказалось более эффективным неравенство (10).

Коль скоро мы посчитали возможным ссылаться на модель строения Земли по Буллену—Гутенбергу как на известную модель первого приближения, то последний вопрос может быть решен и по-другому: считая распределение плотности заданным, получим по (1) значение $V(O)$ путем непосредственных вычислений.

Эти вычисления выполняются элементарно (по схеме, аналогичной тому случаю, когда вычислялись $\|\delta\|$) и приводят к следующему результату:

$$V(O) = V_{\max} = 109719000 \text{ м}^2 \text{ сек}^{-2}.$$

Совокупность полученных выше результатов дает область изменения ньютоновского потенциала Земли.

Вычислим, наконец, значение еще одной характеристики гравитационного поля Земли, ее энергию ($Э$)

$$-2Э = \int_\tau \delta V \, d\tau. \qquad (11)$$

Эта величина имеет важное значение при решении вопроса о распределении плотности вещества внутри Земли. Знания одной этой величины достаточно для того, чтобы обратная задача теории ньютоновского потенциала (задача о нахождении плотности масс гравитирующего тела заданной формы по его известному внешнему потенциалу) имела бы единственное решение. Из формулы (11) видно, что

$$-2Э \approx V_{\text{ср}} \int_\tau \delta d\tau = V_{\text{ср}} M.$$

Указанные выше числовые значения fM, f и $V_{\text{ср}}$ позволяют вычислить приближенное значение гравитационной энергии Земли

$$Э = -2{,}34 \cdot 10^{39}\ \textit{эрг},$$

близкое к значениям, приводимым другими авторами (см., например [9]), полученным, правда, иными способами.

Итак, нами приведена методика получения таких характеристик внутреннего гравитационного поля Земли, как $V_{\text{ср}}$, $V_{\min}$, $V_{\max}$ и $W_{\text{ср}}$, $W_{\min}$, $W_{\max}$.

На основании наилучшим образом подобранных параметров внешнего гравитационного поля Земли найдены области изменения внутреннего потенциала притяжения Земли V и внутреннего потенциала силы тяжести W:

$$62 \cdot 10^6\ \textit{м}^2\ \textit{сек}^{-2} \leqslant V \leqslant 110 \cdot 10^6\ \textit{м}^2\ \textit{сек}^{-2};$$

$$62 \cdot 10^6\ \textit{м}^2\ \textit{сек}^{-2} \leqslant W \leqslant 110 \cdot 10^6\ \textit{м}^2\ \textit{сек}^{-2}.$$

Установлены распространенные на объем Земли средние интегральные значения гравитационного потенциала V и потенциала силы тяжести W Земли:

$$V_{\text{ср}} = 78322000\ \textit{м}^2\ \textit{сек}^{-2},\ W_{\text{ср}} = 78394000\ \textit{м}^2\textit{сек}^{-2}.$$

Вычислено значение потенциала силы тяжести на геоиде

$$W_0 = 62636900\ \textit{м}^2\ \textit{сек}^{-2}.$$

Получено достаточно надежное значение нормы плотности (см. формулу (9)) вещества внутри Земли

$$\|\delta\| = 2 \cdot 10^{11}\ \textit{м}^{-3/2}\textit{т}^{+1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимбирев Б. П. Теория фигуры Земли. М., Геодезиздат, 1961.

2. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее приложение к основным задачам математической физики. М., Гостехиздат, 1953.

3. Джеффрис Г. Земля. (Пер. с англ.). М., ИЛ, 1960.

4. Жонголович И. Д. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. — Тр. ИТА, вып. III. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1952.

5. Идельсон Н. И. Теория потенциала. М.—Л., ГТТИ, 1932.

6. Клеро А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. (Пер. с франц.), Изд-во АН СССР, 1947.

7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. II. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.

8. Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. (Пер. с немецк.). М., «Наука», 1965.

9. Любимова Е. А. Об источниках внутреннего тепла Земли — В сб.: Вопросы космогонии, т. 8. М., Изд-во АН СССР, 1962.

10. Ляпунов А. М. Собр. соч., т. III, IV. М., Изд-во АН СССР, 1965—1966.

11. Магницкий В. А. Внутреннее строение и физика Земли. М., «Недра», 1965.

12. Мещеряков Г. А. О наличии горизонтальных неоднородностей в теле Земли. — Изв. АН СССР, «Физика Земли», № 3, М., 1970.

13. Паньков В. Л., Жарков В. Н. О распределении плотности в недрах Земли. — В сб.: Земные приливы и внутреннее строение Земли. М., «Наука», 1967.

14. Сагитов М. У. Постоянная тяготения и масса Земли. М., «Наука», 1969.

15. Стандартная Земля, геодезические параметры Земли на 1966 год. (Пер. с англ.). М., «Мир», 1969.

Работа поступила в редколлегию 5 ноября 1971 г. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского ордена Ленина политехнического института.