РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 17

УДК 528.232.24

П. Г. ЧЕРНЯГА

О РЕШЕНИИ ГЛАВНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Существует много методов решения главных геодезических задач. В середине XIX века решение прямой геодезической задачи на поверхности эллипсоида вращения при помощи эллиптических функций дал Якоби. Затем эллиптические функции применялись для решения метрических задач на поверхности эллипсоида вращения известными математиками и геодезистами — Хандриковым [3] в 1867 г., Альфеном в 1888 г. [7], Форсайтом в 1911 г. [6]. В 1945 г. была опубликована статья Витмана [1], в которой он дает решение прямой и обратной геодезических задач также при помощи теории эллиптических функций, но практически опять прибегает к классическим методам разложения в ряды.

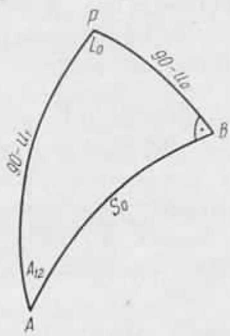

Рис. 1. Прямоугольный полярный геодезический треугольник.

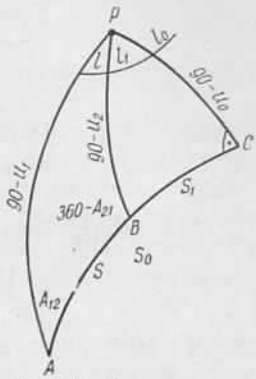

Рис. 2. Два полярных геодезических треугольника с общим прямым углом *C*.

В работе Форсайта [6] выведены формулы для решения на поверхности эллипсоида вращения полярных геодезических треугольников, в которых угол *B* (рис. 1) равен 90°. Связь между элементами прямоугольного геодезического треугольника *APB* подобна связи соответствующих элементов прямоугольного треугольника на сфере. Приведем сводку формул, позволяющую построить решение прямой и обратной геодезических задач (при $\angle B=90°$):

$$\left.\begin{aligned}
&\cos u_1 \sin A_{12}=\cos u_0;\\
&\sin u_0 \,\mathrm{cn}\,\psi=\sin u_1;\\
&\mathrm{tg}\, A_{12} \,\mathrm{sn}\,\psi=\mathrm{ctg}\, u_0;\\
&\mathrm{ctg}\, u_1 \cos A_{12}=\mathrm{tn}\,\psi;\\
&S=a(1-e^2\cos^2 u_0)^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\psi}\mathrm{dn}^2\psi\, d\psi;\\
&l=\frac{(1-e^2\cos^2 u_0)^{\frac{1}{2}}}{\cos u_0}\int\limits_0^{\psi}\frac{\mathrm{dn}^2\psi}{1+\mathrm{tg}^2 u_0\,\mathrm{sn}^2\psi}\,d\psi,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где ψ есть переменная, обращающаяся в нуль при $u_1=u_0$; u_1 и u_0 — приведенные широты точек *A* и *B*; *l* — разность долгот; *e* — первый эксцентриситет.

Модуль эллиптической функции равен

$$k=\frac{e^2 \sin^2 u_0}{1-e^2 \cos^2 u_0}.$$

Для целей геодезии надо иметь решение полярного геодезического треугольника, относящегося к поверхности эллипсоида, но в общем случае косоугольного ($\angle B \neq 90°$). Используя формулы Форсайта (1), получаем уравнения для решения прямой геодезической задачи.

При решении последней (рис. 2) имеем данные A_{12}, u_1, S. Требуется определить u_2, e, A_{21}. Рассматривая геодезический прямоугольный треугольник APC, записываем [6]:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos u_1 \sin A_{12}=\cos u_0;\\
&\sin u_0 \operatorname{cn} \psi=\sin u_1;\\
&S_0=a\left(1-e^2 \cos^2 u_0\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\psi} \operatorname{dn}^2 \psi \, d\psi;\\
&l=\frac{\left(1-e^2 \cos^2 u_0\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos u_0} \int_0^{\psi} \frac{\operatorname{dn}^2 \psi}{1+\operatorname{tg}^2 u_0 \operatorname{sn}^2 \psi} \, d\psi.
\end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Из треугольника BPC можно определить величину u_2

$$\sin u_2=\sin u_0 \operatorname{cn} \psi_1, \qquad (2)$$

где ψ_1 есть переменная, обращающаяся в нуль при $u_2=u_0$. Величину ψ_1 можно найти из следующего интеграла (как верхний предел его)

$$-\int_{\psi}^{\psi_1} \operatorname{dn}^2 \psi \, d\psi=\frac{S}{a\left(1-e^2 \cos^2 u_1 \sin^2 A_{12}\right)^{1/2}}. \qquad (3)$$

Зная ψ_1 и ψ определяем l:

$$l=\frac{\left(1-e^2 \cos^2 u_1 \sin^2 A_{12}\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos u_1 \sin A_{12}} \int_{\varphi_1}^{\psi} \frac{\operatorname{dn}^2 \psi}{1+\operatorname{tg}^2 u_1 \operatorname{tn}^2 \psi \frac{1}{\sin^2 A_{22}}}. \qquad (4)$$

Азимут A_{21} находим по известной формуле Клеро

$$\sin A_{21}=-\frac{\cos u_1 \sin A_{12}}{\cos u_2}. \qquad (5)$$

Формулы (2), (4), (5) дают решение прямой геодезической задачи.

Полученные формулы частично совпадают с промежуточными формулами Витмана [1].

Б. Гдовский в работах [9, 10] также применял эллиптические функции, однако он пользовался при этом изометрической широтой, которая более пригодна для картографии, а в нашем случае для решения задач сфероидической геодезии ее применение явно нецелесообразно.

При решении обратной геодезической задачи исходными данными являются u_1, u_2, l. Требуется определить A_{12}, A_{21}, S.

Легко видеть, что эта задача решается системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos u_1 \sin A_{12} = \cos u_0;\\
&\sin u_1 \sin u_0 = \operatorname{cn} \psi;\\
&\sin u_2 \sin u_0 = \operatorname{cn} \psi_1;\\
&\sin A_{21} = -\frac{\cos u_1 \sin A_{12}}{\cos u_2};\\
&S = a\,(1 - e^2 \cos^2 u_0)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{\psi_1}^{\psi} \operatorname{dn}^2 \psi\, d\psi;\\
&l = \frac{(1 - e^2 \cos^2 u_0)^{\frac{1}{2}}}{\cos u_0} \int\limits_{\psi_1}^{\psi} \frac{\operatorname{dn}^2 \psi}{1 + \operatorname{tg}^2 u_0 \operatorname{sn}^2 \psi}\, d\psi,
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

которая также может быть запрограммирована.

Таким образом, следующим этапом является непосредственный экспериментальный счет на ЭЦВМ.

В заключение отметим, что в настоящее время обе главные задачи решаются на ЭЦВМ интегрированием по методу Рунге—Кутта нормальной системы дифференциальных уравнений геодезической линии [4, 5], поэтому могли бы показаться излишними все изложенные здесь построения. Однако мы считаем, что использование эллиптических функций при решении главных геодезических задач ускорит процессы их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Витман А. И. Решение геодезических задач на большие расстояния. — Сб. статей ГУГИК. М., Геодезиздат, № 12, 1945.
2. Мещеряков Г. А. О математическом аппарате современной геодезии. — Тр. НИИГАиК, № 15. М., 1961.
3. Хандриков М. Ф. Элементарная теория эллиптических функций и интегралов. М., 1867.
4. Харамза Ф. Вычисление обеих главных геодезических задач при помощи вычислительного автомата Урал I. «Geodetický a kartografický obzor», Praha, 1961, № 1.
5. Якушко Г. Г. Решение главных геодезических задач методом численного интегрирования на ЭЦВМ. — Материалы к симпозиуму молодых ученых и специалистов. Новосибирск, 1969.
6. Forsyth A. R. Lectures on the differential Geometry of curves and surfaces. Cambridge, 1912.
7. Halphen G. H. Traite des fonctions elliptiques et de leurs applications. 2 éme partie. Paris, 1888.
8. Christoffel E. B. Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Abh. Ak. Wiss. Berlin, 1868.
9. Gdowski B. Wyznaczenie dtugosci tuku geodetyki na elipsoidzie obrotowej przy pomocy funkeji eliptycznych jacobiego «Geodezia i kartografia», t. 14, 4. Warszawa, 1965.
10. Gdowski B. Zadanie glowne geodezji wyźszej dla dowolnych odlegtosci. «Geodezia i kartografia», t. 17, 1. Warszawa, 1968.

Работа поступила в редколлегию 7 января 1972 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского ордена Ленина политехнического института.