КАРТОГРАФИЯ

УДК 528.9.09+528.235

Ю. М. ЮЗЕФОВИЧ

КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ ОДНОГО НОВОГО КЛАССА

В работах [5]—[7] исследуется новый класс картографических проекций, определяемый системой уравнений в характеристиках

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon=0, \\ &m=n^k \qquad (k=\text{const}), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

названный там классом Г. Основная система Эйлера—Урмаева [3] для него имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_\varphi=kn^{k-2}\sec\varphi n_\lambda, \\ &\gamma_\lambda=-n^{-k}\cos\varphi n_\varphi+n^{1-k}\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ее решение дает картографические характеристики проекций γ и n (а следовательно, и m, как функции φ и λ. По этим характеристикам затем можно найти прямоугольные координаты точек на плоскости проекции (тоже как функции φ и λ) из уравнений, которые для ортогональных $n(\varepsilon=0)$ запишутся

$$\left.\begin{aligned} &dx=m\cos\gamma\, d\varphi+n\cos\varphi\sin\gamma\, d\lambda, \\ &dy=-m\sin\gamma\, d\varphi+n\cos\varphi\cos\gamma\, d\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Мы рассмотрим только частные случаи проекций класса Г — конические проекции. Интерес к последним вообще очень велик среди картографов, что объясняется, во-первых, сравнительной простотой построения данных проекций, во-вторых, большой наглядностью их геометрической интерпретации, в-третьих, хорошей приспособляемостью к различным изображенным территориям (особенно это относится к территории СССР, вытянутой по параллелям), в-четвертых, легкостью выбора наилучших из них по распределению искажений. Вот почему так много карт СССР составляется в различных конических проекциях. А поскольку проекции класса Г при надлежащем выборе параметра k можно получить, как конформные или эквивалентные, так и любые промежуточные между ними, то имеет смысл исследовать конические проекции этого класса.

Конические проекции класса Г получатся, если в основную систему Эйлера—Урмаева (2) подставить

$$\gamma=\alpha\lambda, \tag{4}$$

откуда следует, что $\gamma_\varphi=0$, а $\gamma_\lambda=\alpha$. Тогда

$$\alpha=-n^{-k}\cos\varphi n_\varphi+n^{1-k}\sin\varphi, \tag{5}$$

или

$$n_\varphi-n\operatorname{tg}\varphi=-\alpha n^k\sec\varphi. \tag{6}$$

Решая это уравнение Бернулли обычным приемом (подстановкой $n = u \cdot v$), получаем общее решение в таком виде:

$$n = \sec \varphi \left[\alpha (k-1) I(\varphi;\ k) + C\right]^{\frac{1}{1-k}}, \tag{7}$$

где

$$I(\varphi;\ k) = \int \cos^{-k} \varphi \, d\varphi. \tag{8}$$

Теперь легко найти остальные характеристики

$$\left.\begin{aligned} m &= n^k, \\ p &= mn. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Для определения x и y интегрируем полные дифференциалы (3) по ломаной линии от $(0; 0)$ до $(\varphi; 0)$ и от $(\varphi; 0)$ до $(\varphi; \lambda)$ с учетом того, что m и n зависят только от φ, а $\gamma = \alpha\lambda$, и получаем

$$\left.\begin{aligned} x &= \int\limits_0^{\varphi} m \, d\varphi + \frac{1}{\alpha} n \cos \varphi (1 - \cos \gamma) + C_1, \\ y &= \frac{1}{\alpha} n \cos \varphi \sin \gamma + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Из естественного условия совмещения начал координат географических и прямоугольных вытекает $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$.

Таким образом, для построения конических проекций класса Г необходимо произвести вычисления по формулам (4), (7), (9) и (10). Сильно затрудняет вычисление интеграл (8), не берущийся при дробных значениях параметра k. Как показано в [7], данный интеграл с помощью аппарата специальных функций можно привести к

$$I(\varphi;\ k) = \sin \varphi \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+k)(3+k)\ldots(2n-1+k)}{(2n)!!} \frac{s^n}{2n+1}\right] \tag{11}$$

или

$$I(\varphi;k) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{2-k}{2}\right)} - \cos^{1-k} \varphi \left[\frac{1}{1-k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{c^n}{2n+1-k}\right], \tag{12}$$

где $s = \sin^2 \varphi$, $c = \cos^2 \varphi$. Причем формула (11) выгодней при малых φ, а (12) — при больших. По этим формулам составлены таблицы значений функции $I(\varphi; k)$ с четырьмя знаками после запятой в интервалах $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$ через 5° и $-2{,}5 \leqslant k \leqslant +2{,}5$ через 0,2. Объем и точность указанных таблиц не дают возможности применить их при построении конкретной конической проекции, но вполне достаточны для сравнения проекций между собой при различных значениях k.

Теперь займемся выбором произвольных постоянных α и C. Это можно проделать одним из известных классических способов [4], но при желании получить наилучшую проекцию данного класса лучше всего воспользоваться способом Витковского, обеспечивающим минимум колебания масштаба, или способом Каврайского, обеспечивающим минимум колебания логарифма масштаба. По Витковскому, масштабы на крайних параллелях изображаемой территории равны между собой и на столько больше единицы, на сколько наименьший масштаб меньше ее. По Каврайскому, масштабы на крайних параллелях равны между собой и во столько раз больше единицы, во сколько наименьший масштаб меньше ее. Если обозначить широты крайних параллелей φ_S и φ_N, а параллели с наименьшим масштабом φ_0 и сопроводить такими же индексами масштабы n по этим параллелям, то условия Витковского (I) и Каврайского (II) будут выглядеть так:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{По (I)} \quad n_S=n_N, & \text{По (II)} \quad n_S=n_N, \\ n_S+n_0=n_N+n_0=2. & n_S n_0=n_N n_0=1. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Для определения α и C из этих условий надо сперва определить широту φ_0 параллели с наименьшим масштабом, то есть исследовать n по (7) на экстремум. Первую производную легко найдем из уравнения (6)

$$n'=n\operatorname{tg}\varphi-\alpha n^k\sec\varphi=n\sec\varphi(\sin\varphi-\alpha n^{k-1}), \tag{14}$$

а приравняв ее нулю, получим

$$\sin\varphi_0=\alpha n_0^{k-1}=\alpha\sec^{k-1}\varphi_0[\alpha(k-1)I_0+C]^{-1}, \tag{15}$$

где $I_0=I(\varphi_0;k)$. Отсюда следует, что если в формуле масштаба постоянная C будет иметь вид

$$C=\alpha[\operatorname{ctg}\varphi_0\sec^k\varphi_0-(k-1)I_0], \tag{16}$$

то в точке $\varphi=\varphi_0$ производная масштаба n обратится в нуль, а сам масштаб в этой точке примет экстремальное значение

$$n_0=\alpha^{\frac{1}{1-k}}\sin^{\frac{1}{1-k}}\varphi_0. \tag{17}$$

Для выяснения характера экстремума найдем вторую производную масштаба, дифференцируя (14),

$$n''=n'\sec\varphi(\sin\varphi-\alpha k n^{k-1})+n\sec^2\varphi(1-\alpha n^{k-1}\sin\varphi) \tag{18}$$

и ее значение в точке $\varphi=\varphi_0$

$$n_0''=0+n_0\sec^2\varphi_0(1-\alpha n_0^{k-1}\sin\varphi_0)=\alpha^{\frac{1}{1-k}}\sin^{\frac{1}{k-1}}\varphi_0. \tag{19}$$

При любых $\alpha>0$ и $0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$ $n_0''>0$, следовательно, точка $\varphi=\varphi_0$ является точкой минимума масштаба n, а n_0 по (17) — наименьшим масштабом.

Таким образом, задача сводится к определению из условий (13) φ_0 и α, ибо постоянная C уже выражена через φ_0 по (16). Первое условие дает трансцендентное уравнение относительно φ_0

$$\frac{(k-1)(I_S-I_0)+\operatorname{ctg}\varphi_0\sec^k\varphi_0}{(k-1)(I_N-I_0)+\operatorname{ctg}\varphi_0\sec^k\varphi_0}=\frac{\sec^{1-k}\varphi_N}{\sec^{1-k}\varphi_S}, \tag{20}$$

решать последнее лучше всего численно методом последовательных приближений. Преобразуем его предварительно так:

$$\operatorname{ctg}\varphi_0\sec^k\varphi_0-(k-1)I_0=(k-1)\frac{I_S\cos^{k-1}\varphi_S-I_N\cos^{k-1}\varphi_N}{\cos^{k-1}\varphi_N-\cos^{k-1}\varphi_S}, \tag{21}$$

и правую часть, которая не зависит от φ_0 и, следовательно, легко может быть вычислена, обозначим

$$A=(k-1)\frac{I_S\cos^{k-1}\varphi_S-I_N\cos^{k-1}\varphi_N}{\cos^{k-1}\varphi_N-\cos^{k-1}\varphi_S}. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F(\varphi)=\operatorname{ctg}\varphi\sec^k\varphi-(k-1)I. \tag{23}$$

Очевидно, при $\varphi=\varphi_0$

$$F_0=F(\varphi_0)=A. \tag{24}$$

Но φ_0 неизвестно. Возьмем в качестве первого приближения какое-то φ_1 и будем искать $\varphi_0=\varphi_1+\Delta\varphi$. Из разложения $F(\varphi)$ в ряд Тейлора

$$F(\varphi_0)=F(\varphi_1+\Delta\varphi)=F(\varphi_1)+F'(\varphi_1)\Delta\varphi+\dots \tag{25}$$

получаем

$$\Delta\varphi=\frac{F(\varphi_0)-F(\varphi_1)}{F'(\varphi_1)}=\frac{A-F_1}{F'(\varphi_1)} \tag{26}$$

с точностью до второго порядка. Подставляя сюда производную

$$F'(\varphi)=-\operatorname{ctg}^2\varphi\sec^k\varphi, \tag{27}$$

имеем

$$\Delta\varphi=\frac{F_1-A}{\operatorname{ctg}\varphi_1\sec^k\varphi_1}\operatorname{tg}\varphi_1. \tag{28}$$

Поскольку в (25) отброшены члены с $\Delta^2\varphi$, то $\Delta\varphi$ по (28) еще не даст точного значения φ_0, такое значение даст лишь его следующее приближение. Повторяя этот цикл необходимое число раз, дойдем до $\Delta\varphi_i=0$ и найдем φ_0. Рабочие формулы можно представить в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}
&A=(k-1)\frac{I_S\cos^{k-1}\varphi_S-I_N\cos^{k-1}\varphi_N}{\cos^{k-1}\varphi_N-\cos^{k-1}\varphi_S};\\
&B_i=\operatorname{ctg}\varphi_i\sec^k\psi_i;\\
&F_i=B_i-(k-1)I_i;\\
&\Delta F_i=F_i-A;\\
&\Delta\varphi_i=\frac{\Delta F_i}{B_i}\operatorname{tg}\varphi_i;\\
&\varphi_{i+1}=\varphi_i+\Delta\varphi_i.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

При наличии достаточно точной таблицы функции $I(\varphi;k)$ с достаточно мелким шагом (хотя бы в 1°) решение уравнения (20) по формулам (29) не представит особого труда. По таблицам же $I(\varphi;k)$ в [7] с шагом в 5° придется применять интерполяционные формулы (Стирлинга или Бесселя) высоких порядков — второго, третьего, а при $k>1{,}5$ даже пятого, шестого. В последних случаях высокая точность все равно не будет достигнута, так как разности высоких порядков в таблице [7] уже теряют плавность хода. Поэтому, пользуясь только этими таблицами, получаем не самую лучшую проекцию, а весьма близкую к ней.

После того как по формулам (29) найдено φ_0, из второго условия (13) сравнительно легко можно определить

$$\left.\begin{aligned}
&\text{По (I)}\quad \alpha=\left(\frac{\sec\varphi_S\,[(k-1)I_S+A]^{\frac{1}{1-k}}+\sin^{\frac{1}{k-1}}\varphi_0}{2}\right)^{k-1}.\\
&\text{По (II)}\quad \alpha=\sqrt{\frac{\sin\varphi_0}{[(k-1)I_S+A]\cos^{k-1}\varphi_S}},
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

а затем и C по формуле

$$C=\alpha A, \tag{31}$$

которая получается сопоставлением (16), (23) и (24).

Такое определение α и C из условий (13) затруднено необходимостью предварительного определения φ_0. На практике довольно часто упрощают эти условия, заменяя в них φ_0 на $\varphi_c=\frac{1}{2}(\varphi_S+\varphi_N)$, ибо $n_C \approx n_0$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{По (I)} \quad n_S=n_N, & \text{По (II)} \quad n_S=n_N, \\ n_S+n_c=n_N+n_c=2. & n_S n_c=n_N n_c=1. \end{array}\right\} \tag{32}$$

Первое условие для рассматриваемых проекций дает

$$\sec\varphi_S\,[\alpha(k-1)I_S+C]^{\frac{1}{1-k}}=\sec\varphi_N\,[\alpha(k-1)I_N+C]^{\frac{1}{1-k}}, \tag{33}$$

откуда

$$\cos^{k-1}\varphi_S\left[(k-1)I_S+\frac{C}{\alpha}\right]=\cos^{k-1}\varphi_N\left[(k-1)I_N+\frac{C}{\alpha}\right]. \tag{34}$$

Теперь легко выразить

$$\frac{C}{\alpha}=(k-1)\frac{I_S\cos^{k-1}\varphi_S-I_N\cos^{k-1}\varphi_N}{\cos^{k-1}\varphi_N-\cos^{k-1}\varphi_S}=A. \tag{35}$$

Из второго условия (32) после несложных преобразований получаем:

$$\left.\begin{array}{l} \text{По (I)} \quad \alpha=\left(\dfrac{\sec\varphi_c\,[(k-1)I_c+A]^{\frac{1}{1-k}}+\sec\varphi_S\,[(k-1)I_S+A]^{\frac{1}{1-k}}}{2}\right)^{k-1}. \\ \text{По (II)} \quad \alpha=\dfrac{\cos^{\frac{1-k}{2}}\varphi_c\cos^{\frac{1-k}{2}}\varphi_S}{\sqrt{(k-1)^2 I_c I_S+A(k-1)(I_c+I_S)+A^2}}. \end{array}\right\} \tag{36}$$

Формулы (29), (30), (31) или (35), (36) решают задачу определения постоянных α и C для получения наилучших конических проекций класса Г: первые три — из строгих условий Витковского или Каврайского (13), последние две — из приближенных (32). Конечно, реализация формул возможна только при конретном, заранее каким-то образом выбранном значении параметра k и для конкретной заданной территории.

Найдем, например, α и C конических проекций класса Г для территории СССР ($\varphi_S=40°$, $\varphi_N=70°$) для различных значений параметра $k\pm0{,}1$; $\pm0{,}5$; $\pm0{,}9$; $\pm1{,}5$; $\pm2{,}0$ и $\pm2{,}5$. Правда, при целых значениях k интеграл (8) берется в конечном виде, и все формулы получаются несколько проще, но коль скоро уже имеются общие формулы, не будем выводить их частные случаи, а просто подставим туда $k=-2$ и $k=+2$, а I возьмем из таблицы в [7].

Результаты вычислений φ_0 и постоянных α и C приведены в табл. 1.

Как видим, отличия α и C, найденных из условий (13) и условий (32), весьма незначительные, а найденных из условий Витковского и Каврайского — и того меньше. Поскольку нашей целью является не исследование различных условий выбора постоянных α и C, а исследование конических проекций класса Г, то есть их сравнение между собой при различных значениях параметра k, достаточно рассчитать проекции с постоянными α и C, определенными только из каких-то одних усло-

Таблица 1

Постоянные проекций φ_0, α и C

к	−2,5	−2,0	−1,5	−0,9	−0,5	−0,1	+0,1	+0,5	+0,9	+1,5	+2,0	+2,5
φ_1	55°00′	55°00′	55°00′	55°00′	55°00′	55°00′	55°00′	55°00′	55°00′	55°00′	55°00′	55°00′
$\Delta\varphi_1$	+3 20	+3 03	+2 49	+2 33	+2 21	+1 57	+1 48	+1 27	+1 05	+0 30	0 00	−0 31
$\Delta\varphi_2$	+1 12	+0 44	+0 31	0 21	0 00	+0 10	+0 08	+0 04	+0 02	0 00		0 00
$\Delta\varphi_3$	−0 11	+0 03	+0 02	0 00	0 00	+0 01	0 00	0 00	0 00			
$\Delta\varphi_4$	0 00	0 00	0 00			0 00						
φ_0	59 21	58 50	58 22	57 54	57 32	57 08	56 56	56 31	56 07	55 30	55 00	54 29
α												
Строго по (I)	0,81 175	0,81 367	0,81 597	0,81 937	0,82 157	0,82 360	0,82 462	0,82 662	0,82 867	0,83 147	0,83 357	0,83 538
Прибл. по (I)	0,80 870	0,81 130	0,81 456	0,81 854	0,82 092	0,82 318	0,82 434	0,82 655	0,82 865	0,83 150	0,83 356	0,83 538
Строго по (II)	0,81 212	0,81 393	0,81 635	0,81 956	0,82 175	0,82 372	0,82 472	0,82 666	0,82 869	0,83 142	0,83 347	0,83 518
Прибл. по (II)	0,80 884	0,81 160	0,81 485	0,81 871	0,82 107	0,82 331	0,82 450	0,82 657	0,82 864	0,83 143	0,83 347	0,83 519
C												
Строго по (I)	2,0474	1,9256	1,7965	1,6314	1,5131	1,3875	1,3218	1,1844	1,0381	0,80029	0,58371	0,34845
Прибл. по (I)	2,0397	1,9199	1,7934	1,6298	1,5119	1,3868	1,3213	1,1843	1,0380	0,80032	0,58370	0,34845
Строго по (II)	2,0483	1,9262	1,7974	1,6318	1,5135	1,3877	1,3219	1,1844	1,0381	0,80024	0,58364	0,34836
Прибл. по (II)	2,0401	1,9206	1,7941	1,6301	1,5122	1,3870	1,3216	1,1843	1,0380	0,80025	0,58364	0,34837

Таблица 2

Максимальные колебания и отношения масштабов

к	−2,5	−2,0	−1,5	−1,0	−0,9	−0,5	−0,1	0	+0,1	+0,5	+0,9	+1,0	+1,5	+2,0	+2,5
Колебание (max)	0,0834	0,0664	0,0504	0,0352	0,0338	0,0341	0,0344	0,0346	0,0348	0,0352	0,0354	0,0350	0,0535	0,0692	0,0860
Отношение (max)	1,0867	1,0685	1,0516	1,0355	1,0344	1,0347	0,0350	1,0352	1,0354	1,0358	1,0360	1,0356	1,0539	1,0717	1,0898

Таблица 3

Характеристики искажений

κ		−2,5	−2,0	−1,5	−1,0	−0,9	−0,5	−0,1	0	+0,1	+0,5	+0,9	+1,0	+1,5	+2,0	±2,5
40°	ε	287′	244	203	166	159	134	123	122	124	139	168	175	224	275	331
	$p-1$	−227	−155	−80	0	+16	+85	+156	+173	+191	+266	+339	+353	+444	+528	+615
	ω	184′	161′	137′	114′	109′	87′	65′	59′	54′	30′	6′	0	30′	59′	88′
45°	ε	46	30	20	14	12	7	4	3	0	0	10	7	19	35	53
	$p-1$	−36	−19	−8	0	+1	+5	+5	+4	+1	0	−19	−14	−37	−66	−98
	ω	29′	20′	14′	10′	9′	4′	2′	1′	0	0	0′	0	4′	8′	16′
50°	ε	154	137	122	100	102	85	80	80	82	93	122	126	165	214	261
	$p-1$	+121	+87	+49	0	−10	−54	−102	−113	−127	−176	−242	−250	−321	−402	−475
	ω	97′	89′	82′	69′	66′	56′	43′	39′	36′	20′	4′	0	22′	47′	72′
55°	ε	300	253	208	168	161	135	123	122	124	139	169	175	222	272	324
	$p-1$	+236	+159	+81	0	−17	−85	−156	−173	−191	−262	−334	−347	−431	−510	−589
	ω	187′	163′	139′	116′	111′	88′	66′	60′	55′	31′	6′	0	30′	60′	89′
60°	ε	348	281	225	174	163	136	119	117	119	125	150	154	185	214	237
	$p-1$	+273	+177	+88	0	−17	−85	−151	−165	−185	−236	−298	−306	−359	−402	−434
	ω	216′	181′	151′	120′	112′	89′	64′	57′	52′	28′	6′	0	25′	47′	65′
65°	ε	225	157	121	88	79	63	47	47	47	41	48	44	42	33	15
	$p-1$	+177	+99	+48	0	−9	−39	−59	−66	−73	−78	−95	−88	−83	−63	−30
	ω	140′	102′	81′	60′	54′	41′	25′	23′	20′	9′	2′	0	6′	7′	2′
70°	ε	287	244	203	166	159	134	123	122	124	139	168	175	224	275	331
	$p-1$	−227	−155	−80	0	+16	+85	+156	+173	+191	+266	+339	+353	+444	+528	+615
	ω	184′	161′	137′	114′	109′	87′	65′	59′	54′	30′	6′	0	30′	59′	88′
	E	254	209	172	137	131	109	99	98	100	109	134	138	175	214	254
	P	200	132	67	0	14	69	125	138	154	208	267	276	342	405	474
	Ω	160′	143′	115′	94′	89′	71′	53′	48′	44′	24′	5′	0	23′	46′	60′
	$M_{E,P}$	229	175	131	97	93	91	113	120	130	166	211	218	272	324	380
	$M_{E,\Omega}$	375	329	266	216	204	165	129	121	115	92	95	98	133	179	218

вий. Очевидно, влияние параметра k на характер распределения искажений сохранится и при других значениях α и C, поскольку они очень близки друг к другу.

Для сравнения конических проекций класса Г для территории СССР при тех же значениях параметра k и при $k=1$, $k=0$ и $k=-1$ (конформная, равнопромежуточная и эквивалентная проекции) были вычислены масштабы n и m через 5° по широте по формулам (7) и (9) с постоянными α и C, определенными из приближенных условий Витковского. Но при $k=+1$ формула (7) не имеет места. Для этого случая уравнение Бернулли (6) решается по-иному

$$n = Ke^{-\alpha I} \sec \varphi \tag{37}$$

и, следовательно, постоянные проекции вычисляются по-иному

$$\begin{gathered} \alpha = M \frac{\lg \cos \varphi_S - \lg \cos \varphi_N}{I_N - I_S} \quad (M = \ln 10 = 2{,}302855), \\ K = \frac{2}{e^{-\alpha I_S} \sec \varphi_S + e^{-\alpha I_c} \sec \varphi_c}. \end{gathered} \tag{38}$$

Масштаб m вычисляется, конечно, по той же формуле (9).

В случае $k=0$ «работают» те же формулы (7), (35) и (36), но в несколько упрощенном виде. В случае $k=-1$ все характеристики эквивалентной конической проекции Витковского не вычислялись вовсе, а были заимствованы из [2, стр. 150].

В табл. 2 приведены максимальные колебания масштабов (разность наибольшего и наименьшего масштабов) и максимальное отношение масштабов (отношение наибольшего масштаба к наименьшему) для всех проекций.

Как видим, минимальной величины эти характеристики достигают при $k=-0{,}9$, хотя при $-1 \leqslant k \leqslant +1$ они примерно одинаковы и заметно возрастают только при $|k|>1$. Так что по этим характеристикам все проекции в диапазоне k от -1 до $+1$ практически равноценны.

Однако эти характеристики оценивают проекции только по линейным искажениям. Сравним их по всем искажениям (табл. 3). Все величины, кроме ω, даны в единицах четвертого знака. В ней приведены: обобщенная характеристика линейных искажений в точке

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(m-1)^2 \cos^2 A + (n-1)^2 \sin^2 A]\, dA = \frac{1}{2} [(m-1)^2 + (n-1)^2] \tag{39}$$

(критерий Эйри), площадных искажений $p-1$ и угловых искажений

$$\omega = 2 \arcsin \frac{m-n}{m+n}. \tag{40}$$

Здесь же приведены обобщенные характеристики всех искажений (среднеквадратического типа) для всей территории

$$\left.\begin{aligned} E^2 &= \frac{1}{7} \Sigma \varepsilon^2, \\ P^2 &= \frac{1}{7} \Sigma (p-1)^2, \\ \Omega^2 &= \frac{1}{7} \Sigma \omega^2, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

и их суммарное влияние (тоже среднеквадратического типа)

$$\left.\begin{aligned} M^2_{\mathrm{E}P} &= \frac{1}{2}(\mathrm{E}^2 + P^2), \\ M^2_{\mathrm{E}\Omega} &= \frac{1}{2}(\mathrm{E}^2+\Omega^2 \, \textit{рад}). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Анализ данных показывает, что наименьшим суммарным влиянием линейных и площадных искажений обладают проекции при $k=-0{,}5$, а линейных и угловых — при $k=+0{,}5$. Поэтому, если нет никаких обстоятельств, требующих строгой эквивалентности или строгой конформности проекций, следует предпочесть конические проекции класса Г при значениях параметра $k=\pm 0{,}5$. В одном случае появляются незначительные площадные искажения, но почти в полтора раза уменьшаются линейные и угловые искажения. В другом случае появляются такие же незначительные угловые искажения, но тоже почти в полтора раза уменьшаются линейные и площадные.

При этом, хотя преимущество проекций класса Г при $k=\pm 0{,}5$ сравнительно с другими значениями параметра доказано пока только для конических проекций, можно утверждать, что наше заключение будет справедливо и для любых проекций класса.

В [1] Г. А. Гинзбург и Т. Д. Салманова делят проекции по характеру искажений на пять групп, относя во вторую группу (по их классификации) проекции, обладающие небольшими искажениями площадей, стоящие в ряду проекций приблизительно посередине между соответствующими равновеликими и равнопромежуточными, а в четвертую — между равнопромежуточными и равноугольными. И рекомендуя для составления карт различного целевого назначения ту или иную проекцию, авторы чаще всего останавливаются именно на этих группах, второй и четвертой. Вообще такая чисто словесная группировка проекций несколько расплывчата. Но применительно к проекциям класса Г понятие «приблизительно посередине» получает уже четкое количественное выражение — по значению параметра k.

Таким образом, можно считать, что настоящее исследование подтверждает рекомендации [1] и дополняет их, придавая им более конкретный характер. Иными словами, там, где в [1] идет речь о конических проекциях второй и четвертой групп, можно смело рекомендовать производству конические проекции класса Г при $k=-0{,}5$ или $k=+0{,}5$.

Что же касается некоторого усложнения расчета проекций класса Г по сравнению с эквивалентными или конформными, то, во-первых, при современном оснащении картографического производства вычислительной техникой это затруднение не так существенно, а во-вторых, затраты труда и средств на расчет проекции, какими бы большими они ни были, не идут ни в какое сравнение с затратами труда и средств на создание карты в целом.

В заключение сделаем следующее замечание. Совершенно очевидно, что при вычислении координат x и y картографической сетки интеграл в первой из формул (10) придется брать численно. Разложение подынтегральной функции в ряд представляется очень громоздким. А так как ее значения в интервале $\varphi_S \leqslant \varphi \leqslant \varphi_N$ уже вычислены, то естественным будет интегрирование одним из методов, использующих таблицу значений подынтегральной функции типа Котесовых формул или формул Грегори. Для этого придется дополнить такую таблицу значениями функции m в интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_S$ с тем же шагом. А учитывая необходимость многократного интегрирования по этой таблице (для каждой параллели картографической сетки), можно рекомендовать метод, изложенный в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург Г. А., Салманова Т. Д. Атлас для выбора картографических проекций. — Тр. ЦНИИГАиК, вып. 110, М., 1957.

2. Граур А. В. Математическая картография. Л., Учпедгиз, 1938.

3. Мещеряков Г. А. Теоретические основы математической картографии. М., «Недра», 1968.

4. Соловьев М. Д. Математическая картография. М., «Недра», 1969.

5. Юзефович Ю. М. О некоторых новых проекциях, близких к эквивалентным. — В сб. научн. трудов БСХА «Землеустройство, планировка сельских населенных пунктов и геодезия», 86. Горки, 1971.

6. Юзефович Ю. М. Распространение теоремы Чебышева—Граве на один новый класс картографических проекций. — Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 3. М., 1971.

7. Юзефович Ю. М. О вычислении одного интеграла при исследовании картографических проекций. — В сб. научн. трудов БСХА «Землеустройство, планировка сельских населенных пунктов и геодезия», т. 86. Горки, 1971.

8. Юзефович Ю. М. Применение ряда со средним аргументом в численном интегрировании. — В сб. научн. трудов БСХА «Землеустройство, планировка сельских населенных пунктов и геодезия», т. 55. Горки, 1968.

Работа поступила в редколлегию 10 декабря 1971 года. Рекомендована ректоратом Белорусской сельскохозяйственной академии и кафедрой высшей математики.