УДК 528.14/16

И. Ф. МОНИН

ЭФФЕКТИВНОСТЬ УРАВНИВАНИЯ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Современная теория математической обработки геодезических измерений учитывает ошибки исходных данных, систематические ошибки и корреляционные связи между измеренными величинами.

Классический метод наименьших квадратов Гаусса—Лежандра, как известно, основывался на предположении о том, чтобы измерения были статистически независимы, не имели систематических ошибок, а их случайные ошибки подчинялись нормальному закону распределений.

Многие ученые [1—14] обобщали метод наименьших квадратов применительно к уравниванию геодезических измерений коррелатным и параметрическим методами. По сути, их работы распространили отмеченные методы уравнивания на обработку статистически зависимых измерений в геодезических сетях.

В данной работе делается упор на обобщение самого метода наименьших квадратов, как такового. Затем применяется обобщенный метод наименьших квадратов к обработке отдельных измерений и к уравниванию геодезических сетей, а также на примерах определяется эффективность уравнивания коррелированных измерений.

Как известно, классическая формулировка метода наименьших квадратов состоит в предписании

$$V^{\text{т}}V=\min, \tag{1}$$

где V — матрица-столбец поправок в измеренные величины; т — знак транспонирования матриц. В случае неравноточных измерений предписание метода наименьших квадратов имеет вид

$$V^{\text{т}}PV=\min, \tag{2}$$

где P — диагональная матрица весов измеренных величин. Перепишем (2) иначе:

$$V^{\text{т}} P^{1/2} P^{1/2} V = (P^{1/2} V)^{\text{т}} P^{1/2} V = \min. \tag{3}$$

Если теперь сделать замену

$$P^{1/2} V = V_1, \tag{4}$$

то случай неравноточных измерений (3) сводится к равноточному, при умножении матрицы поправок V слева на некоторую неособенную матрицу $P^{1/2}$. Точно так же можно вектор коррелированных измерений преобразовать в некоррелированный вектор с весами измерений, равными единице.

Статистически зависимые измерения характеризуются корреляционной матрицей

$$\sigma^2 \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \ldots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} \ldots & Q_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{1n} & Q_{2n} \ldots & Q_{nn} \end{pmatrix} = \sigma^2 Q, \tag{5}$$

где $Q_{11}, Q_{22}, \ldots, Q_{nn}$ — весовые коэффициенты, или обратные веса измерений;

$$Q_{it} = \frac{k_{it}}{\sqrt{P_i P_t}} Q_{it}, \quad k_{it} = \frac{M\{(l_i - Ml_i)(l_t - Ml_t)\}}{\sigma_i \sigma_t}. \tag{6}$$

Здесь k_{it} — коэффициент корреляции между измерениями l_i и l_t; $P_i P_t$ — веса измерений; σ_i, σ_t — среднеквадратические ошибки измерений; M — оператор математического ожидания. В числителе второй формулы из (6) находится корреляционный момент, или момент статистической связи между измерениями l_i и l_t; $i \neq t$.

Пусть измерения L характеризуются корреляционной матрицей $\sigma^2 Q$. Умножим слева матрицу-столбец L на некоторую неособенную матрицу B_0 (по аналогии с (4)):

$$B_0 L = L_1. \tag{7}$$

Легко показать, что корреляционная матрица вектора измерений L_1 будет выражена через корреляционную матрицу измерений L следующим образом:

$$Q_{L_1} = B_0 Q B_0^{\text{т}}. \tag{8}$$

Так как корреляционная матрица всегда квадратная и симметричная, а любую симметричную матрицу можно представить произведением двух треугольных матриц Q_1, а именно:

$$Q = Q_1 Q_1^{\text{т}},$$

то (8) примет вид

$$Q_{L_1} = B_0 Q_1 Q_1^{\text{т}} B_0^{\text{т}} = B_0 Q_1 (B_0 Q_1)^{\text{т}}. \tag{9}$$

Потребуем теперь, чтобы (9) превратилась в единичную матрицу. Приравнивая (9) к единичной матрице, найдем матрицу B_0:

$$B_0 = Q_1^{-1}; \quad Q_1^{-1} L = L_1, \quad Q_1^{-1} V = V_1. \tag{10}$$

Подставим далее третье выражение из (10) в предписание метода наименьших квадратов (1) и преобразуем его:

$$V_1^{\mathrm{T}} V_1 = (Q_1^{-1} V)^{\mathrm{T}} Q_1^{-1} V = V^{\mathrm{T}} (Q_1^{-1})^{\mathrm{T}} Q_1^{-1} V = V^{\mathrm{T}} (Q_1 Q_1^{\mathrm{T}})^{-1} V;$$

$$V^{\mathrm{T}} Q^{-1} V = \min. \tag{11}$$

Выражение (11) и представляет собой обобщение метода наименьших квадратов на статистически зависимые, или коррелированные измерения.

Применим (11) к обработке отдельных измерений и к уравниванию геодезических сетей, предполагая, что измерения не содержат больших систематических ошибок, подчиняются нормальному закону распределения, коррелированы с корреляционной матрицей $\sigma^2 Q$.

1. Обработка измерений одной и той же величины. Пусть имеем ряд измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Надо найти наилучшее значение. Обозначим его через L_0. Применяем предписание (11):

$$(L_0 - l_1,\ L_0 - l_2, \cdots\ L_0 - l_n)\, Q^{-1} \begin{vmatrix} L_0 - l_1 \\ L_0 - l_2 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ L_0 - l_n \end{vmatrix} = \min.$$

Дифференцируя написанные выражения по L_0 и приравнивая нулю, получаем

$$(11 \cdots 11)\, Q^{-1} \left(L_0 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ \\ l_n \end{vmatrix} \right) = 0. \tag{12}$$

Введем обозначения

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = S; \quad \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ \\ l_n \end{vmatrix} = L,$$

Из (12) найдем

$$L_0 = \frac{S^{\mathrm{T}} Q^{-1} L}{S^{\mathrm{T}} Q^{-1} S}. \tag{13}$$

Формулу (13) в несколько ином виде впервые получил Ю. В. Кемниц [5].

2. Коррелатный метод уравнивания. Напишем условные уравнения и функцию Лагранжа:

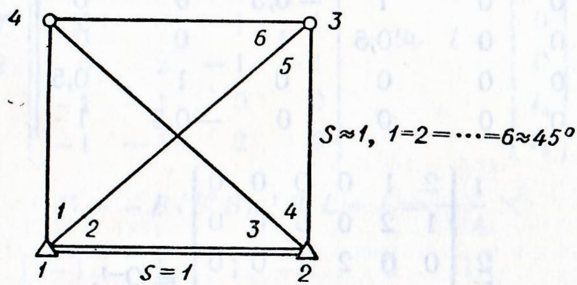
$$AV + W = 0, \quad F = V^{\text{т}} Q^{-1} V - 2K^{\text{т}} (AV + W).$$

Исследуя функции F на экстремум, получаем

$$2V^{\text{т}} Q^{-1} dV - 2K^{\text{т}} A dV = 0,$$

$$V^{\text{т}} Q^{-1} - K^{\text{т}} A = 0, \quad V = QA^{\text{т}} K, \quad AQA^{\text{т}} K + W = 0,$$

$$K = -(AQA^{\text{т}})^{-1} W, \quad V = -QA^{\text{т}} (AQA^{\text{т}})^{-1} W. \tag{14}$$



Сеть триангуляции.

Формула (14) есть результат уравнивания: по ней вычисляют поправки в результаты измеренных величин. При этом применялись обозначения: A — прямоугольная матрица коэффициентов условных уравнений; W — матрица-столбец свободных членов; K — матрица-столбец коррелат.

3. Параметрический метод уравнивания. Напишем уравнения поправок и функцию

$$BX + L = V, \quad F = V^{\text{т}} Q^{-1} V.$$

Дифференцируя функцию F, найдем

$$dF = dV^{\text{т}} Q^{-1} V + V^{\text{т}} Q^{-1} dV =$$

$$= d(BX + L)^{\text{т}} Q^{-1} V + V^{\text{т}} Q^{-1} d(BX + L) = 0,$$

$$dX^{\text{т}} B^{\text{т}} Q^{-1} (BX + L) = 0, \tag{15}$$

$$(BX + L)^{\text{т}} Q^{-1} B dX = 0. \tag{16}$$

Из (15) или (16) получаем нормальные уравнения

$$B^{\text{т}} Q^{-1} BX + B^{\text{т}} Q^{-1} L = 0, \tag{17}$$

решая которые, найдем поправки в координаты и в измеренные величины

$$X = -(B^{\text{т}} Q^{-1} B)^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} L;$$

$$V = -B(B^{\text{т}} Q^{-1} B)^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} L + L, \tag{18}$$

где B — матрица коэффициентов уравнений поправок; L — матрица-столбец свободных членов.

Теперь покажем на примере уравнивания сети, изображенной на рисунке, какая эффективность учета корреляционных связей.

Пусть в сети с одинаковой точностью измеряются направления. Будем уравнивать сеть по углам. Смежные углы на пунктах 1, 2 и 3 будут коррелированы, так как они имеют общие направления. Нетрудно показать теоретически, что коэффициент корреляции при этом равняется — 0,5, а корреляционные матрицы (прямая и обратная) имеют вид

$$\begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & 1 \end{vmatrix} = Q;$$

$$\frac{2}{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = Q^{-1}.$$

Ниже приведены результаты вычислений без учета и с учетом корреляционных связей коррелатным и параметрическим методами.

Коррелатный метод

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix};$$

$$V = -A^{\text{т}}(AA^{\text{т}})^{-1}W = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} W;$$

$$V = -QA^{\text{т}}(AQA^{\text{т}})^{-1}W = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1/3 & 2/5 \\ 2/3 & -1/5 \\ 1/3 & 3/5 \\ 1/3 & -3/5 \\ 2/3 & 1/5 \\ -1/3 & -2/5 \end{vmatrix} W;$$

$$V^{\mathrm{T}} V = W^{\mathrm{T}} (AA^{\mathrm{T}})^{-1} W = \frac{1}{4} W^{\mathrm{T}} W;$$

$$V^{\mathrm{T}} Q^{-1} V = W^{\mathrm{T}} (AQA^{\mathrm{T}})^{-1} W = W^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} W.$$

Параметрический метод

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = B; \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_5 \\ l_6 \end{pmatrix};$$

$$V = -B (B^{\mathrm{T}} B)^{-1} B^{\mathrm{T}} L + L = -\frac{1}{4} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} L + L;$$

$$V = -B (B^{\mathrm{T}} Q^{-1} B)^{-1} B^{\mathrm{T}} Q^{-1} L + L = -\frac{1}{6} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 24/5 & 1 & -1/5 & 11/5 & 1 & 6/5 \\ 3/5 & 4 & -7/5 & -13/5 & -2 & -3/5 \\ -9/5 & -1 & 16/5 & 4/5 & -1 & 9/5 \\ 9/5 & -1 & 4/5 & 16/5 & -1 & -9/5 \\ -3/5 & -2 & -13/5 & -7/5 & 4 & 3/5 \\ 6/5 & 1 & 11/5 & -1/5 & 1 & 24/5 \end{pmatrix} L + L;$$

$$V^{\mathrm{T}} V = L^{\mathrm{T}} \{1 - B (B^{\mathrm{T}} B)^{-1} B^{\mathrm{T}}\} L = \frac{1}{4} L^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & +1 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} L;$$

$$V^{\mathrm{T}} Q^{-1} V = L^{\mathrm{T}} \{Q^{-1} - Q^{-1} B (B^{\mathrm{T}} Q^{-1} B)^{-1} B^{\mathrm{T}} Q^{-1}\} L = \frac{1}{5} L^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5/3 & 5/3 & 5/3 & 5/3 & 0 \\ 1 & 5/3 & 8/3 & 2/3 & 5/3 & -1 \\ -1 & 5/3 & 2/3 & 8/3 & 5/3 & 1 \\ 0 & 5/3 & 5/3 & 5/3 & 5/3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} L.$$

Как показывают расчеты, эффективность уравнивания коррелированных величин в рассмотренном примере составляет 4—7%.

Список литературы: 1. *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* Городская полигонометрия. — М.: Недра, 1979. 2. *Гордеев Ю. А.* Обобщение приемов оценки точности положения пунктов плановых опорных геодезических сетей. — Л.: Морской транспорт, 1959. 3. *Гордеев Ю. А.* О применении принципа наименьших квадратов при уравнивании зависимых результатов измерений. — Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка, 1960, вып. 2. 4. *Зимовнов В. Н.* Вопросы оценки точности результатов измерений. — М.: Геодезиздат, 1951. 5. *Кемниц Ю. В.* Математическая обработка зависимых результатов измерений. — М.: Недра, 1970. 6. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки измерений. — М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1958. 7. *Маркузе Ю. И.* Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей. — М.: Недра, 1972. 8. *Маркузе Ю. И.* Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. — М.: Недра, 1982. 9. *Машимов М. М.* Уравнивание геодезических сетей. — М.: Недра, 1979. 10. *Романовский В. И.* Основные задачи теории ошибок. — М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 11. *Aitken A. C.* On least squares and linear combinations of observations. Proc. — Roy. Soc. of Edinbourgh, 1935, v. 55. 12. *Lehman G.* Die Ausgleichung von Beobachtungsgroßen zwischen denen Abhängigkeiten bestehen. — Z. f. Verm., 1954, № 2. 13. *Tienstra I. M.* An extension of the technique of method of least squares to correlated observations. — Bulletin Geodesique, 1947. 14. *Wolf H.* Zur Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen zwischen denen Abhängig keiten bestéhen. — Z. f. Verm., 1955, № 12.

Статья поступила в редколлегию 01. 11. 82