УДК 528.35

В. П. НОВОСЕЛЬСКАЯ

ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

В работе [2] предложены формулы для подсчета величин обратных весов дирекционного угла конечной стороны ряда и длины диагонали. В настоящей статье сделана попытка получить формулу для обратного веса направления диагонали ряда. Как и в [2], предполагаем, что ряд состоит из геодезических прямоугольников с продвигом 0,6—2,0. В этом ряду измерены углы и стороны; направление диагонали AB (рисунок) совпадает с направлением оси Y.

В свободном ряду геодезических прямоугольников линейно-углового построения при уравнении методом условных измерений возникают $3N$ условных уравнений фигур (где N — число прямоугольников в ряду) вида

$$(8i-7)+(8i-6)+(8i-5)+(8i-4)+w_{i,1}=0, \tag{1}$$

$2N$ уравнений сторон вида

$$\delta_{8i-7}(8i-7)-\delta_{8i-4}(8i-4)+(\lg a_i)-(\lg b_{2i-1})+w_{i,2}=0 \tag{2}$$

и $4N$ уравнений сторон вида

$$\delta_{(8i-5)+(8i-6)}(8i-5)+\delta_{(8i-5)+(8i-6)}(8i-6)-\delta_{8i-7}(8i-7)+ \\ +(\lg b_{2i-1})-(\lg c_{2i-1})+w_{i,3}=0, \tag{3}$$

где i — порядковый номер геодезического прямоугольника; $(8i)$, $(\lg a)$, $(\lg b)$ и $(\lg c)$ — вероятнейшие поправки к измеренным углам и логарифмам длин сторон; δ — приращение логарифма синуса угла при изменении угла на $1''$; w — свободные члены условных уравнений.

Обозначим продвиг цепи $v=\frac{b}{a}$; с изменением продвига меняются связующие углы прямоугольника A и B (угол A — против стороны a, угол B — против стороны b). Следовательно, меняются δ_A и δ_B. Так как

$$\delta_A=\mu\cdot 10^6 \operatorname{ctg} A\cdot \sin 1'', \qquad \mu\cdot 10^6 \sin 1''=K=2{,}106,$$

то

$$\delta_A=Kv; \quad \delta_B=\frac{K}{v}.$$

Найдем весовую функцию для направления диагонали AB-ряда.

Примем, что углы в сети измерены равноточно, независимо друг от друга, и длина диагонали AB равна $L=ns$.

Ошибки в углах 1 и 8 при точке A вызовут поперечный сдвиг конца диагонали AB, равный dT_1:

$$dT_1 = [(1) + (8)] \frac{sn}{\rho''}.$$

Ошибки в углах 6, 7, 9 и 16 при точке d, углы 14, 15, 17 и 24 при точке e и углы при следующих точках диагонали AB вызовут такие поперечные смещения конца диагонали AB-ряда:

$$dT_2 = [(6) + (7) + (9) + (16)] \frac{s(n-1)}{\rho''};$$

$$dT_3 = [(14) + (15) + (17) + (24)] \frac{s(n-2)}{\rho''};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dT_i = [(22) + (23) + (8i) + (8i-7)] \frac{s[n-(i-1)]}{\rho''}.$$

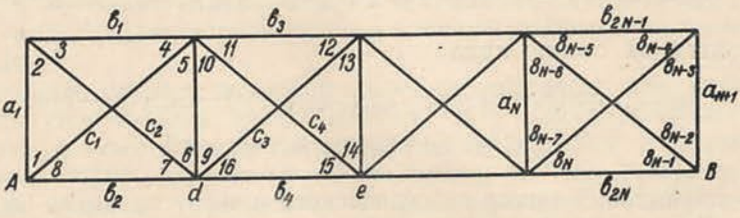
Следовательно, общий поперечный сдвиг конца диагонали AB-ряда

$$dT = dT_1 + dT_2 + dT_3 + \ldots + dT_N.$$

Так как $dT = \frac{dT'' \cdot \rho''}{L}$, то весовую функцию для направления диагонали AB-ряда записываем

$$idT'' = i(1) + (i-1)(6) + (i-1)(7) + i(8) + (i-1)(9) + \ldots + (8i) + \\ + (8i-7). \qquad (4)$$

Для совместного уравнивания измеренных углов и сторон необходимо установить соотношение размеров угловых и линейных поправок при по-



Ряд линейно-угловой триангуляции.

мощи весов. Как показано в работе [1], веса при уравнивании можно принять равными

$$P_\beta = 1;\ P_{\lg s} = \frac{1}{q}; \qquad q = \frac{1}{P_{\lg s}} = \left(\frac{10^6 \mu \cdot m_s}{m_\beta \cdot S}\right)^2,$$

где m_β и m_s — средние квадратические ошибки измерения угла и длины стороны, μ — модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным.

Чтобы сократить вычисления, применим двухгрупповой метод решения нормальных уравнений. В первую группу отнесем два первых уравнения фигур вида (1), во вторую — все остальные уравнения. Преобразовывать коэффициенты второй группы будем способом, описанным в [1].

Коэффициенты в весовой функции (4) можно оставить непреобразованными, а для получения коэффициентов нормальных уравнений использовать зависимости:

$$[a'\,b'] = [a'\,b],\ [a'\,a'] = [aa] - \frac{1}{4}[a]^2, \qquad (5)$$

где a — непреобразованный коэффициент условного уравнения; a' — коэффициент, преобразованный за условия первой группы; $[a]$ — сумма непреобразованных коэффициентов в данном треугольнике.

Находим квадратичный коэффициент функции направления диагонали, обозначив непреобразованные коэффициенты в весовой функции через f_T. На основании формулы (5) при $N=5$ имеем:

$$[f'_T f'_T] = f_T f_T] - \frac{1}{4}[f_T]^2,$$

где

$$[f_T f_T] = 4[(N-4)^2 + (N-3)^2 + (N-2)^2 + (N-1)^2] + 2N^2 =$$

$$= 4[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (N-1)^2 + N^2] - 2N^2 = \frac{2N(N+1)(2N+1)}{3} - 2N^2;$$

$$[f_T]^2 = (N-4)^2 + (N-3)^2 + (N-2)^2 + (N-1)^2 + N^2 +$$

$$+ [N + 2(N-1)]^2 + [(N-1) + 2(N-2)]^2 + [(N-2) + 2(N-3)]^2 +$$

$$+ [(N-3) + 2(N-4)]^2 + [(N-4) + 2(N-5)]^2 =$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{4N(N+1)(2N+1)}{6} -$$

$$-4N^2 + 4[N(N-1) + (N-1)(N-2) + (N-2)(N-3) +$$

$$+ (N-3)(N-4) + (N-4)(N-5)].$$

Выражение в последних квадратных скобках записываем в виде суммы двух рядов

$$[N(N-1) + (N-1)(N-2) + (N-2)(N-3) + (N-3)(N-4) +$$

$$+ (N-4)(N-5)] = [(N-1)^2 + (N-1) + (N-2)^2 + (N-2) +$$

$$+ (N-3)^2 + (N-3) + (N-4)^2 + (N-4) + (N-5)^2 + (N-5)] =$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{6} - N(N-1).$$

Следовательно,

$$[f'_T f'_T] = \frac{2N(N+1)(2N+1)}{3} - 2N^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{5N(N+1)(2N+1)}{3} - 6N^2 - 2N\right].$$

$$[f'_T f'_T] = \frac{N}{4}(2N^2 + N + 3). \qquad (6)$$

Для определения веса уравненных величин используем формулу

$$\frac{1}{P_T} = \frac{[f'_T f'_T] - (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7)}{N^2}, \qquad (7)$$

где Q_1, Q_2, Q_3 и т. д. — значения величин, вносимых в обратный вес функции условными уравнениями фигур и сторон второй группы.

Значения

v	0,61	0,61	1	1	1	1	1	1
N	1	5	1	2	5	5	5	5
$m_s : m_\beta \cdot S$	1/200000	1/200000	1/200000	1/200000	1/500000	1/450000	1/350000	1/200000
Q_1	0,5	27,5	0,5	2,5	27,5	27,5	27,5	27,5
Q_2	0,1571	8,6396	0,0691	0,3453	7,2544	7,0538	6,5407	3,7982
Q_3	0,0389	2,1459	0,0340	0,1698	6,2899	5,8569	4,9003	1,8678
Q_4	0,0441	12,3816	0,0917	0,5869	13,5408	13,1341	12,1753	7,4154
Q_5	0,0012	1,0205	0,0091	0,0551	4,4579	4,3161	3,8638	1,3453
Q_6	0,0757	0,3798	0,0414	0,0858	0,3180	0,2925	0,3256	0,2162
Q_7	0,0016	0,0717	0,0109	0,0430	0,1605	0,1500	0,2276	0,0098
$Q_1+Q_2+Q_3$	0,6960	38,2855	0,6031	3,0151	41,0443	40,4107	38,9410	33,1660
$Q_4+Q_5+Q_6+Q_7$	0,1226	13,8536	0,1531	0,7708	18,4772	17,8927	16,5923	8,9769
ΣQ_{1-7}	0,8186	52,1391	0,7562	3,7859	59,5215	58,3034	55,5333	42,1429
$1{,}33\,(Q_1+Q_2+Q_3)$	0,9257	50,9197	0,8021	4,0101	54,5889	53,7462	51,7915	44,1108
Погрешность, %	13,4	2,3	6,0	5,9	8,2	7,8	6,7	4,6

Из решения нормальных уравнений имеем

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{[a_i' f_T (i-1)]^2}{[a_i' a_i' \cdot (i-1)]} = \frac{0{,}5\,N\,(N+1)(2N+1)}{6}, \tag{8}$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{[b_i' f_T \cdot (N+i-1)]^2}{[b_i' b_i' \cdot (N+i-1)]} = \frac{N}{2{,}5\,(1+v^4) + v^2\,(1+1{,}8q)} \times$$

$$\times \frac{(N+1)(2N+1)}{6}. \tag{9}$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{N} \frac{[c_i' f_T \cdot (2N+i-1)]^2}{[c_i' c_i' \cdot (2N+i-1)]} = \frac{0{,}55\,v^2\,(1+5v^2+1{,}8\,q)^2}{10\,q\,(1+v^4) + 2v^2\,(6{,}68+q+2{,}7\,q^2)} \cdot Q_2. \tag{10}$$

Выражения для Q_4, Q_5, Q_6 и Q_7 получаются очень громоздкими. Лучше выразить их через известные величины Q_1, Q_2 и Q_3. При продвиге 0,6—2,0 $\frac{1}{500000} < \frac{m_s}{m_\beta . S} < \frac{1}{100000}$ и при любом N с малой погрешностью соблюдается равенство:

$$Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 = 0{,}33\ (Q_1 + Q_2 + Q_3). \tag{11}$$

Коэффициент $K = 0{,}33$ в этом равенстве найдем следующим образом. Решая нормальные уравнения строгим способом, получаем значения величин Q для прямоугольников с продвигом 0,6—2,0 при различных N и $\frac{m_s}{m_\beta \cdot S}$. Результаты вычислений приведены в таблице.

Сопоставляя значения суммы $Q_1 + Q_2 + Q_3$ со значением суммы $Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7$, устанавливаем зависимость (11), которая хорошо соблюдается для разных N и v.

$$\Sigma Q_{1-7} = 1{,}33\ (Q_1 + Q_2 + Q_3). \tag{12}$$

Как видно из таблицы, погрешности величин, вычисленных по формуле (12), по сравнению со значениями ΣQ_{1-7}, полученными из строгого решения нормальных уравнений, невелики.

величин Q

1,42	1,42	1,73	1,73	1,73	1,73	2,0	2,0	2,0	2,0
3	5	1	2	5	5	1	2	3	5
1/200000	1/200000	1/200000	1/200000	1/350000	1/200000	1/200000	1/200000	1/450000	1/200000
7,0	27,5	0,5	2,5	27.5	27,5	0.5	2,5	7,0	27,5
0,4360	1,7127	0,0188	0,0940	1,5623	1,0307	0,0123	0,0617	0,2594	0,6781
0,3576	1,4047	0,0208	0.1041	4,1943	1,1468	0,0174	0,0867	1,1838	0,9539
1,4209	4,7670	0.1878	0,6070	5,8424	3,8317	0,2174	0,6273	1,9667	3.3188
0,1770	1,2204	0,0219	0,0458	4.9310	1,0433	0,0233	0,0411	0,8839	0,8726
0,0700	0 1012	0,0100	0,0226	0,1663	0,0587	0.0060	0,0131	0,0940	0,0365
0.2000	0,2903	0.0703	0,1617	0,4000	0,3820	0,0818	0,2015	0,2216	0,4624
7,7936	30,6174	0,5396	2,6981	33,2566	29,6775	0,5297	2,6484	8,4432	29,1320
1.8679	6.3789	0,2900	0,8371	11,3397	5,3157	0,3285	0,8830	3,1662	4,6903
9,6615	36,9964	0.8296	3,5352	44.5963	34,9932	0,8582	3,5314	11,6094	33,8223
10,3655	40,7211	0,7177	3,5885	44,2313	39,4710	0,7045	3,5224	11,2295	38,7456
7,2	10,0	13,4	1,5	0,8	12,8	17,9	0,2	3,2	14,5

Зная величины (6), (8), (9), (10) и учитывая равенства (7) и (12), находим формулу обратного веса направления диагонали ряда:

$$\frac{1}{P_T}=\frac{1{,}66\,N^2-0{,}5\,N+3{,}83}{6\,N}-\frac{1{,}33}{2{,}5\,(1+v^4)+v^2\,(1+1{,}8\,q)}\times$$

$$\times\left[1+\frac{0{,}55\,v^2\,(1+5\,v^2+1{,}8\,q)^2}{10q\,(1+v^4)+2v^2\,(6{,}68+q+2{,}7\,q^2)}\right]\frac{(N+1)(2N+1)}{6N}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Новосельская В. П. Точность цепи линейно-угловой триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 1, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1964.
2. Новосельская В. П. Оценка точности элементов линейно-углового ряда из геодезических прямоугольников. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3, Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1965.

Работа поступила
12 марта 1969 года.