

АЭРОФОТОСЪЕМКА

УДК 528.735

Х. В. БУРШТЫНСКАЯ

К ВОПРОСУ О ДЕЙСТВИИ ЗАКОНА
ДВОЙНОГО СУММИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК
В МАРШРУТЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФОТОТРИАНГУЛЯЦИИ

В литературе вопрос о действии случайных ошибок в пространственных фототриангуляционных сетях рассматривается по-разному [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

Будем рассматривать пространственную сеть в виде вытянутого хода, состоящего из элементарных одинаковых звеньев. Пусть в каждом элементарном звене возникли случайные ошибки, соответственно

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n.$

Если при построении пространственной сети последующее элементарное звено ориентируется относительно ранее ориентированного предыдущего звена, то, как известно, происходит накопление ошибок в сети по закону двойного суммирования:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \varepsilon_1, \\ \eta_2 &= 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \eta_3 &= 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ &\dots \\ \eta_n &= n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_2 + \dots + 2\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n.\end{aligned}\tag{1}$$

Как видно из выражения (1), между переменными $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ существует корреляционная зависимость.

Для установления этой зависимости, а также для выявления свойства кривой ошибок при помощи таблиц нормально распределенных случайных чисел составлялась выборка, состоящая из 90 элементов [1]. Чтобы получить последовательность случайных чисел, соответствующих нормальному распределению с параметрами (a, σ) , табличные значения преобразовывали по формуле $\sigma x + a$. Математическое ожидание a принимали равным 0, а среднее квадратическое отклонение σ — равным 0,2. Суммирование полученных чисел в соответствии с формулой (1) производилось на ЭВМ «Ритм» ($n=15$); построено 90 рядов.

Результаты суммирования представлены на графике (рис. 1), из которого видно, что кривая ошибок η напоминает график кривой систематических ошибок. Немногие из кривых пересекают несколько раз ось X , в большинстве они принадлежат одной (верхней или нижней) части графика, то есть кривая ошибок η содержит в себе как бы систематическую и случайную часть.

Само же распределение отдельных значений функций η случайно и приближается к нормальному распределению, что следует из рассмотрения гистограммы и выравнивающей ее кривой нормального распределения (рис. 2). Гистограмма построена для $n=15$, аналогичные

гистограммы получены и для других значений аргумента (в статье они не приводятся).

Для характеристики случайной функции найдем корреляционную матрицу, состоящую из дисперсий и корреляционных моментов, характеризующих попарную корреляцию всех величин [2].

Корреляционная матрица имеет вид:

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & K_{nn} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где $K_{ij} = M[\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j]$ ($i \neq j$) $i, j = 1, 2, \dots, 15$, $K_{ii} = D_i = M[\dot{\theta}_i^2]$, $\dot{\theta}_i = \eta_i - m_i$, $\dot{\theta}_j = \eta_j - m_j$.

Здесь K_{ij} — корреляционные моменты; D_i — дисперсии; $\dot{\theta}_i, \dot{\theta}_j$ — центрированные случайные величины η .

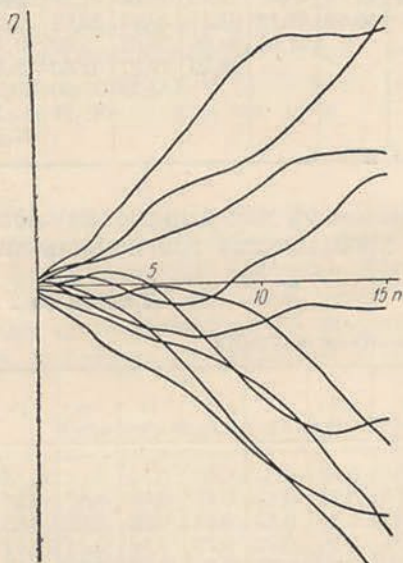


Рис. 1. График случайных функций η .

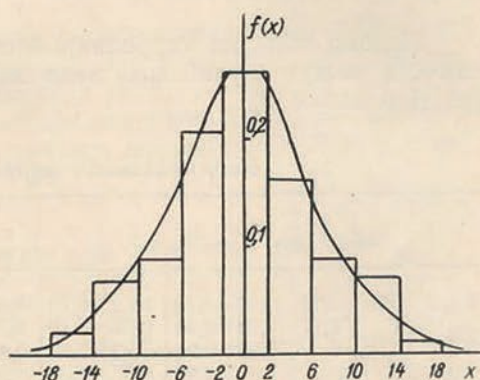


Рис. 2. Гистограмма.

Состоятельные и несмещенные оценки для параметров m_i и K_{ij} вычисляются по формулам:

$$\tilde{m}_i = \frac{\sum_{i=1}^k \eta_i}{k}, \quad \tilde{K}_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^k (\eta_i - \tilde{m}_i)(\eta_j - \tilde{m}_j)}{k-1}, \quad \tilde{K}_{ii} = \tilde{D}_i = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - \tilde{m}_i)^2}{k-1}. \quad (3)$$

В приведенных формулах k — количество выборок.

Данные вычислений корреляционной матрицы для удобства сведены в табл. 1.

В табл. 2 приводится нормированная корреляционная матрица, оценки для элементов которой определяются по результатам предыдущих вычислений:

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j},$$

где

$$\tilde{\sigma}_i = \sqrt{\tilde{D}_i}, \quad \tilde{\sigma}_j = \sqrt{\tilde{D}_j}. \quad (4)$$

При рассмотрении таблицы обращает на себя внимание медленное убывание корреляционной функции, что свидетельствует о высокой степени коррелированности между смежными величинами, чем, собственно, и объясняется систематический характер кривой ошибок.

Таблица 1

Корреляционная матрица

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,04	0,09	0,13	0,18	0,24	0,29	0,35	0,39	0,46	0,49	0,52	0,56	0,60	0,56	0,58
2		0,23	0,38	0,54	0,69	0,86	1,00	1,16	1,30	1,44	1,57	1,68	1,87	1,77	1,82
3			0,67	0,95	1,26	1,57	1,87	2,07	2,43	2,69	2,90	3,14	3,27	3,51	3,79
4				1,46	1,94	2,44	2,99	3,40	3,83	4,28	4,61	4,94	5,43	5,75	6,08
5					2,66	3,37	4,10	4,80	5,41	6,02	6,58	7,02	7,80	7,98	8,78
6						4,35	5,35	6,10	7,28	7,95	8,81	9,53	10,97	11,26	12,01
7							6,90	7,96	9,04	10,24	11,36	12,38	13,60	14,67	15,69
8								9,60	11,08	12,53	13,86	15,14	16,88	18,22	20,56
9									12,92	14,76	16,47	18,16	20,00	21,70	23,45
10										16,89	19,13	21,12	23,45	25,52	27,25
11											21,66	24,09	26,62	29,27	31,40
12												26,99	29,27	32,83	35,57
13													34,39	37,70	40,93
14														41,77	45,24
15															49,50

Подбор порядка корреляционного уравнения для выражения зависимости между случайными величинами производился при помощи чисел Чебышева [3].

Таблица 2

Нормированная корреляционная матрица

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0,95	0,86	0,80	0,76	0,72	0,70	0,67	0,67	0,62	0,59	0,57	0,54	0,47	0,43
2		1	0,97	0,93	0,88	0,84	0,79	0,78	0,75	0,73	0,70	0,67	0,66	0,57	0,54
3			1	0,96	0,95	0,92	0,87	0,81	0,82	0,80	0,75	0,74	0,68	0,66	0,65
4				1	0,98	0,97	0,94	0,91	0,88	0,86	0,82	0,79	0,76	0,74	0,71
5					1	0,99	0,96	0,95	0,92	0,90	0,87	0,83	0,81	0,76	0,76
6						1	0,98	0,94	0,97	0,93	0,91	0,88	0,89	0,83	0,82
7							1	0,98	0,96	0,95	0,93	0,91	0,88	0,87	0,85
8								1	0,99	0,98	0,98	0,95	0,93	0,91	0,94
9									1	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93	0,92
10										1	0,99	0,99	0,97	0,96	0,94
11											1	0,99	0,98	0,97	0,96
12												1	0,96	0,98	0,97
13													1	0,9	0,99
14														1	0,99
15															1

Вычисление корреляционных уравнений требуемого порядка λ при помощи чисел Чебышева состоит в нахождении членов следующего ряда Чебышева:

$$\lambda(f_n) = \frac{\sum \eta_i}{n} + \frac{\sum \eta_i \psi_1(n_i)}{\sum \psi_1^2(n_i)} \psi_1(n) + \frac{\sum \eta_i \psi_2(n_i)}{\sum \psi_2^2(n_i)} \psi_2(n) + \dots + \frac{\sum \eta_i \psi_\lambda(n_i)}{\sum \psi_\lambda^2(n_i)} \psi_\lambda(n). \quad (5)$$

Значения $\psi_\lambda(n_i)$ называются числами Чебышева и приводятся в таблице.

Основные ошибки, при помощи которых определяется степень приближения корреляционного уравнения того или иного порядка к наблюдаемым данным, вычисляются по формуле:

$$\sigma_\lambda = \sqrt{\frac{\varepsilon_\lambda}{n - (\lambda + 1)}},$$

где

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon_{\lambda-1} - \frac{(\varepsilon C_\lambda \psi_\lambda \eta_i)^2}{\varepsilon (C_\lambda \psi_\lambda)^2}. \quad (6)$$

Здесь ε_λ — сумма квадратов разностей между наблюдаемыми значениями η_i и значениями, определяемыми корреляционным уравнением; C_λ — коэффициенты.

Из вычисления основных ошибок корреляционных уравнений по формуле (6) установлено, что эти ошибки значительно снижаются при переходе к корреляционному уравнению первого, второго и третьего порядка. Переход к корреляционному уравнению четвертого порядка вносит несущественное уточнение результата. Поэтому мы остановились на корреляционном уравнении третьего порядка, построенном по трем равномерно расположенным точкам ($n=5, n=10, n=15$) по формуле

$$\eta = c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3. \quad (7)$$

ЭВМ вычисляла остаточные отклонения экспериментальной кривой от интерполяционной кривой третьего порядка. По этим данным вычислена корреляционная матрица, приведенная в табл. 3.

Устранение основной части случайных зависимых ошибок при помощи интерполяционного полинома третьего порядка достаточно полное, что видно из сравнения таблиц 1 и 3.

Таблица 3

Корреляционная матрица, вычисленная по остаточным ошибкам

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,07	0,09	0,07	0,04	0	-0,02	-0,02	-0,02	-0,01	0	0,01	0,01	0,01	0	0
2		0,13	0,12	0,06	0	-0,03	-0,04	-0,04	-0,01	0	0,01	0,02	0,01	0,01	0
3			0,12	0,05	0	-0,04	-0,05	-0,04	-0,02	0	0,01	0,02	0,03	0,01	0
4				0,05	0	-0,03	-0,03	-0,03	-0,01	0	0,01	0,01	0,01	0,01	0
5					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6						0,03	0,03	0,03	0,02	0	-0,01	-0,01	-0,02	-0,01	0
7							0,07	0,07	0,04	0	-0,02	-0,03	-0,03	-0,02	0
8								0,08	0,05	0	-0,02	-0,04	-0,04	-0,02	0
9									0,04	0	-0,02	-0,03	-0,03	-0,02	0
10										0	0	0	0	0	0
11											0,03	0,05	0,04	0,03	0
12												0,10	0,09	0,07	0
13													0,12	0,08	0
14														0,08	0
15															0

Итак:

1. Чисто случайные ошибки, накапливаясь в сети фототриангуляции по закону двойного суммирования, приводят к значительным деформациям этой сети.

2. Между смежными ошибками η существует сильная корреляционная связь; коэффициент корреляции между η_1 и η_{15} равен 0,43.

3. Кривая ошибок состоит из систематической и случайной частей; систематическая часть может быть учтена при помощи интерполяционного полинома того или иного порядка.

4. Оставшиеся после исключения систематической части случайные ошибки характеризуют точность сети при условии полного исключения систематических ошибок.

Полученные выводы справедливы для идеальной сети. Для рассмотрения накопления случайных ошибок в реальных пространственных фототриангуляционных сетях предполагается в дальнейшем работу продолжить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Большев Н. Л., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. «Наука», М., 1965.
2. Венцель Е. С. Теория вероятностей. «Наука», М., 1964.
3. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. Физматгиз, М., 1961.
4. Овсянников Р. П. Случайные ошибки пространственной фототриангуляции. Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 5, 1961.
5. Павлов В. И. Особенности накопления случайных ошибок в сетях пространственной фототриангуляции. Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 5, 1961.
6. Bartorelli Udo. Compensazione dell' aerotriangolazione di una catena, affetta da errori soltanto accidentali, con metodo dedotto statisticamente. Ricerca scient., № 4, 1964.
7. Hallert Bertil P. Discussion of «About the character of errors in spatial aerotriangulation» by H. M. Karara «Authors reply Photogramm. Engng. № 2, 1960.
8. Gracie Gordon. Double summation of errors in aerial triangulation. J. Surv. and Mapp. Div. Proc. Amer. Soc. Civil. Engrs, № 2, 1965.
9. Moritz H. An explanation of the «systematic» effect of accidental errors in aerial triangulation. «Photogrammetria», № 1, 1960—1961.
10. Wieser Pierre. Sur la reproductibilité der erreurs du cheminement ae'rien. Bull. Soc. belge photogramm., № 60, 1960.

Работа поступила
19 ноября 1969 года.