

Р. Р. ИЛЬКИВ

ОПЫТ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПО ИЗВЕСТНОМУ ГЕОПОТЕНЦИАЛУ

Методика выполнения экспериментальных нивелирно-гравиметрических работ. Для изучения зависимости силы тяжести от высоты были проведены экспериментальные исследования в горной местности летом 1969 г. по заранее разработанной методике измерений силы тяжести и превышений.

Для измерения геопотенциала выбрали трассу с разностью высот конечных точек $h \approx 1200$ м. Для этой трассы длиной 18 км был выполнен комплекс нивелирно-гравиметрических работ по описанной ниже методике.

Вдоль нивелирного хода II класса создали опорную гравиметрическую сеть, состоящую из 25 опорных гравиметрических точек, расположенных на расстоянии 0,7—1,6 км друг от друга. Опорные гравиметрические точки включали в нивелирный ход. Все постоянные реперы и марки и большинство временных реперов являлись одновременно точками ОГП.

На первых десяти опорных точках (начиная от исходной марки) измерение силы тяжести выполнено три раза, на остальных 15 точках — два раза.

Средняя квадратическая ошибка m измерения силы тяжести на опорном пункте составила $\pm 0,15$ мгал. Значение m вычислено по известной формуле [2]

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{p - n}},$$

где p — число всех наблюдений; n — число пунктов; σ — уклонение силы тяжести от арифметической середины на каждом пункте.

Опорные гравиметрические пункты служили основой для привязки рядовых гравиметрических точек. Привязка осуществлялась через каждые 2—2,5 часа согласно принятому в гравиметрической практике правилу. Можно считать, что за это время смещение нуль-пункта происходит линейно. Общая формула для вычисления поправки за изменение нуль-пункта [2] имеет вид

$$\Delta g_{\kappa, n} = \frac{(g'_\kappa - g'_n) - (g_\kappa - g_n)}{s_\kappa - s_n} (s - s_n),$$

где $g'_\kappa - g'_n$ — наблюдаемое приращение силы тяжести, то есть разность значений в конечной точке рейса и начальной; $g_\kappa - g_n$ — твердое приращение, вычисленное как разность значений в опорных пунктах; $s_\kappa - s_n$ — продолжительность рейса во времени; $s - s_n$ — интервал времени от начала рейса до наблюдения в текущей точке.

За рядовые гравиметрические пункты принимали точки постановок реек нивелирования II класса. Нивелирование и гравиметрические ра-

боты выполняли одновременно. Расстояния между рядовыми гравиметрическими точками составляли в среднем 15—20 м, на равнинных участках эти расстояния увеличивались до 50—100 м. В каждой рядовой гравиметрической точке измеряли силу тяжести гравиметром, температуру внутри гравиметра, время отсчетов по гравиметру. Превышение, расстояние и магнитный азимут измеряли между всеми рядовыми гравиметрическими точками. Превышения между точками получены с точностью нивелирования II класса.

Среднюю квадратическую ошибку измерения силы тяжести на рядовых точках определяли по разностям двойных наблюдений. Для этого брали контрольные точки, на которых наблюдения силы тяжести выполняли дважды. Контрольные точки, как правило, брали из разных рейсов, то есть наблюдения на них выполнялись в разные дни.

Средняя квадратическая ошибка одного измерения определена как $m_p = \pm 0,24$ мгал. Гравиметрические наблюдения выполняли гравиметром ГАК-7 н. Изменение нуля-пункта этого гравиметра в течение 8—10 часов рабочего времени не превышало 1,5—1,8 мгал. Интервал измерения силы тяжести без перестройки диапазона составлял 64 мгал, с перестройкой до 2500 мгал. Отклонение от среднего из двух наблюдений силы тяжести, проведенных на одном и том же пункте и взятых из разных рейсов, не превышало 0,4—0,5 мгал.

Цену деления гравиметра определяли на эталонном гравиметрическом полигоне в июне 1968 г. и в мае 1969 г., и эта цена получена из двух наблюдений четырех пунктов с известной разностью силы тяжести между ними. По определению 1968 г. цена деления микрометра гравиметра $c = -4,34$ мгал, по определению 1969 г. $c = -4,33$ мгал, по паспорту $c = -4,35$ мгал. Цену деления можно считать надежно определенной и мало изменяющейся с течением времени величиной.

По основному участку ($l = 18$ км, $h \approx 1200$ м) получили 723 гравиметрические точки, в которых выполнены описанные выше измерения. Аналогичные измерения производились еще по двум трассам, расстояния и превышения между начальной и конечной точками которых были такими: $l = 2,5$ км; $h \approx 290$ м; $l = 5,9$ км; $h \approx 515$ м. Все это отдельные участки, не связанные между собой, расстояния между которыми равны 20—40 км.

Что касается поправки за температуру, то о ней можно сказать следующее. Кварцевая система и термометр изменение температуры воспринимают не совсем одинаково. Введение температурной поправки осложняется явлением температурной инерции: экстремумы графиков, построенных по отсчетам микрометра и термометра, не совпадают. При привязках к опорным пунктам не реже, чем через 4 часа, температурную поправку нужно учитывать вместе с поправкой за смещение нуля-пункта. Поскольку продолжительность времени между привязками к опорным пунктам не превышала 2,5—3 часа, то влияние изменения температуры учитывали вместе с поправкой за сползание нуля-пункта.

По всем измеренным гравиметрическим рейсам были построены редукционные кривые для введения поправки за смещение нуля-пункта гравиметра.

Приращения силы тяжести $\Delta g_{\text{набл}}$ вычислены от условного уровня, за который принималась нивелирная марка.

На основе результатов гравиметрических наблюдений выполнена следующая работа:

1) построены графики изменения нуля-пункта гравиметра для всех опорных и рядовых рейсов;

2) вычислено $g_{\text{набл}}$ в условной системе всех опорных и рядовых гравиметрических точек с введением поправки за измерение нуля-пункта гравиметра;

3) составлена ведомость исходных данных (Δg , dh_i , h_A) для вычисления вертикального градиента силы тяжести (Δg и dh_i — приращения силы тяжести и высот смежных точек, h_A — превышение текущей точки A над маркой).

Формула для вычисления вертикального градиента силы тяжести. В точке A физической поверхности Земли имеет место разложение потенциала силы тяжести W в ряд Тейлора по направлению L [3]

$$W' = W + \frac{dW}{dL} L + \frac{d^2 W}{dL^2} \cdot \frac{L^2}{2} + \dots$$

Это разложение не вызывает сомнения, если L направлено во внешнее пространство; если L направлено во внутрь притягивающих масс, то его следует понимать как аналитическое продолжение внешнего потенциала, осуществляемое с помощью ряда Тейлора.

Полагая, что L — направление, совпадающее с линией отвеса в точке A , тогда

$$\frac{dW}{dL} = g, \quad \frac{d^2 W}{dL^2} = \frac{dg}{dn}.$$

Принимая еще условие, что $W' = W_0$, где W_0 — потенциал силы тяжести на уровне моря, получаем

$$W_0 = W + gH + \frac{1}{2} \frac{dg}{dn} H^2 + \dots$$

или

$$W_0 - W = gH + \frac{1}{2} \frac{dg}{dn} H^2 + \dots \quad (1)$$

Для разности потенциалов силы тяжести на уровне моря и в текущей точке известна формула

$$W_0 - W = \int g dh = \sum_{i=1}^n g_i dh_i. \quad (2)$$

Под выражением $g_i dh_i$ понимаем среднее значение силы тяжести между двумя близкими точками, умноженное на превышение между этими точками.

Учитывая (1) и (2), получаем

$$\frac{1}{h_A} \sum \frac{g_i + g_{i+1}}{2} dh_i - g_A = \frac{1}{2} \frac{dg}{dn} h_A. \quad (3)$$

Преобразуем формулу (3), исключив значение силы тяжести в исходной точке и оставив только приращение силы тяжести.

За исходную точку была принята нивелирная марка, от которой начинался нивелирно-гравиметрический ход. Значение силы тяжести в этой точке обозначим через g_0 , тогда

$$\frac{g_i + g_{i+1}}{2} = g_0 + \frac{\Delta g_i + \Delta g_{i+1}}{2},$$

где Δg_i и Δg_{i+1} — приращения силы тяжести соответственно в i -й и $(i+1)$ -й точке, отсчитываемые от марки. Поэтому формулу (3) можно записать так:

$$\frac{1}{h_A} \sum \left(g_0 + \frac{\Delta g_i + \Delta g_{i+1}}{2} \right) dh_i - (g_0 + \Delta g_A) = \frac{1}{2} \frac{dg}{dn} h_A. \quad (3')$$

Учитывая, что $\sum dh_i = h_A$, окончательно получаем

$$\frac{dg}{dn} h_A = \frac{1}{h_A} \sum_{i=1}^{i=A} (\Delta g_i + \Delta g_{i+1}) dh_i - 2\Delta g_A. \quad (4)$$

По формуле (4) были вычислены величины вертикального градиента силы тяжести для трех нивелирно-гравиметрических ходов, состоящих соответственно из 723, 75 и 67 точек.

Средние значения $\frac{dg}{dn}$ по трем ходам получились равными соответственно 0,214, 0,204 и 0,197 мгал/м.

По основному нивелирно-гравиметрическому ходу из 723 точек выбрано 175 точек в характерных по рельефу местах. Ниже помещена таблица значений $\frac{dg}{dn}$ для этих 175 точек в порядке возрастающих высот h_A .

Для приведенных в таблице 175 точек был вычислен коэффициент r корреляционной зависимости $\frac{dg}{dn}$ от высоты h_A [1], причем получено $r = +0,43$. Среднее квадратическое отклонение коэффициента корреляции $\sigma(r) = 0,06$. Коэффициент корреляции был вычислен и для всех 723 точек хода, причем найдено, что $r_1 = +0,45$ и соответственно $\sigma(r_1) = 0,03$.

По двум другим ходам коэффициенты корреляции и их средние квадратические отклонения имеют такие значения: $r_2 = +0,79$; $\sigma(r_2) = 0,04$; $r_3 = +0,18$; $\sigma(r_3) = 0,18$.

Согласно формуле Романовского [1], корреляционная связь считается существующей, если $|r| \geq 3 \sigma(r)$ при $n > 50$. Из трех вычисленных ходов в первых двух можно считать установленной корреляционную зависимость $\frac{dg}{dn}$ от высоты.

Зависимость вычисленного вертикального градиента $\frac{dg}{dn}$ от пути нивелирования. Величина геопотенциала для фиксированной точки $W_0 - W = \sum g_i dh_i$ не зависит от пути нивелирования. Превышение же этой точки над исходной изменяется в зависимости от пути нивелирования. Покажем, как изменится вертикальный градиент $\frac{dg}{dn}$ с изменением отметки h_A на величину dh .

Для полного дифференциала от выражения (1) в фиксированной точке A , учитывая, что $W_0 - W = \text{const}$, а переменными являются величины h и $\frac{dg}{dn}$, получаем

$$0 = g_A dh + \left(\frac{dg}{dn} \right)_A h_A dh + \frac{1}{2} \Delta \frac{dg}{dn} h_A^2$$

или

$$-\Delta \frac{dg}{dn} = \left[\frac{2g_A}{h_A^2} + \left(\frac{dg}{dn} \right)_A \frac{2}{h_A} \right] dh. \quad (5)$$

Подставив в формулу (5) значения, полученные из вычисления нивелирно-гравиметрического хода ($h_A = 1185,15$ м, $g_A = 979736,47$ мгал, $\left(\frac{dg}{dn} \right)_A = +0,222$ мгал/м), и считая, что $dh = +0,02$ м, находим:

$$\Delta \frac{dg}{dn} = -0,028 \text{ мгал/м.}$$

Значения вертикальных градиентов силы тяжести*

$h, м$	$\frac{dg}{dn}, мгал/м$	$h, м$	$\frac{dg}{dn}, мгал/м$	$h, м$	$\frac{dg}{dn}, мгал/м$
+	11	+	531	+	919
	20		542		930
	31		554		932
	41		565		943
	52		580		953
	63		593		960
	72		606		964
	83		617		973
	94		626		986
	105		634		997
	117		641		1003
	126		651		1008
	138		662		1016
	149		672		1028
	159		681		1035
	165		688		1040
	173		694		1044
	174		703		1041
	175		707		1036
	175		715		1027
	172		724		1017
	167		730		1006
	167		739		995
	176		746		982
	186		753		974
	198		762		980
	206		769		987
	213		773		1001
	225		773		1009
	236		775		1015
	246		775		1013
	256		773		1005
	268		776		1009
	280		776		1015
	291		776		1009
	299		778		1002
	307		777		1011
	314		777		1011
	327		786		1010
	338		794		1018
	349		804		1029
	356		811		1039
	362		814		1040
	373		814		1048
	386		812		1062
	395		814		1074
	409		822		1088
	422		831		1098
	432		841		1108
	445		845		1118
	456		847		1126
	468		858		1130
	479		869		1140
	486		880		1156
	493		890		1167
	504		899		1175
	514		908		1180
	521				1185
	527				

* Среднее арифметическое по ходу $\frac{dg}{dn} = + 0,214 \text{ мгал/м}$. Среднее квадратическое отклонение от арифметической середины $m = \pm \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{n-1}} = \pm 6 \cdot 10^{-3} \text{ мгал/м}$.

Мы получили результат, свидетельствующий о том, что вычисленная величина вертикального градиента силы тяжести заметно зависит от пути нивелирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайдаев П. А., Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений. «Недра», М., 1969.
2. Маловичко А. К. Основной курс гравиразведки, часть I. Пермь, 1966.
3. Мигаль Н. К. Несколько слов об основных проблемах теории фигуры Земли. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1965.

Работа поступила
21 октября 1970 г.