

Р. Р. ИЛЬКИВ

ОПЫТ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПО ИЗВЕСТНОМУ ГЕОПОТЕНЦИАЛУ

Методика выполнения экспериментальных нивелирно-гравиметрических работ. Для изучения зависимости силы тяжести от высоты были проведены экспериментальные исследования в горной местности летом 1969 г. по заранее разработанной методике измерений силы тяжести и превышений.

Для измерения геопотенциала выбрали трассу с разностью высот конечных точек $h \approx 1200$ м. Для этой трассы длиной 18 км был выполнен комплекс нивелирно-гравиметрических работ по описанной ниже методике.

Вдоль нивелирного хода II класса создали опорную гравиметрическую сеть, состоящую из 25 опорных гравиметрических точек, расположенных на расстоянии 0,7—1,6 км друг от друга. Опорные гравиметрические точки включали в нивелирный ход. Все постоянные реперы и марки и большинство временных реперов являлись одновременно точками ОГП.

На первых десяти опорных точках (начиная от исходной марки) измерение силы тяжести выполнено три раза, на остальных 15 точках — два раза.

Средняя квадратическая ошибка m измерения силы тяжести на опорном пункте составила $\pm 0,15$ мгал. Значение m вычислено по известной формуле [2]

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{p - n}},$$

где p — число всех наблюдений; n — число пунктов; σ — уклонение силы тяжести от арифметической середины на каждом пункте.

Опорные гравиметрические пункты служили основой для привязки рядовых гравиметрических точек. Привязка осуществлялась через каждые 2—2,5 часа согласно принятому в гравиметрической практике правилу. Можно считать, что за это время смещение нуль-пункта происходит линейно. Общая формула для вычисления поправки за изменение нуль-пункта [2] имеет вид

$$\Delta g_{н.п} = \frac{(g'_к - g'_н) - (g_к - g_н)}{s_к - s_н} (s - s_н),$$

где $g'_к - g'_н$ — наблюдаемое приращение силы тяжести, то есть разность значений в конечной точке рейса и начальной; $g_к - g_н$ — твердое приращение, вычисленное как разность значений в опорных пунктах; $s_к - s_н$ — продолжительность рейса во времени; $s - s_н$ — интервал времени от начала рейса до наблюдения в текущей точке.

За рядовые гравиметрические пункты принимали точки постановок реек нивелирования II класса. Нивелирование и гравиметрические ра-

боты выполняли одновременно. Расстояния между рядовыми гравиметрическими точками составляли в среднем 15—20 м, на равнинных участках эти расстояния увеличивались до 50—100 м. В каждой рядовой гравиметрической точке измеряли силу тяжести гравиметром, температуру внутри гравиметра, время отсчетов по гравиметру. Превышение, расстояние и магнитный азимут измеряли между всеми рядовыми гравиметрическими точками. Превышения между точками получены с точностью нивелирования II класса.

Среднюю квадратическую ошибку измерения силы тяжести на рядовых точках определяли по разностям двойных наблюдений. Для этого брали контрольные точки, на которых наблюдения силы тяжести выполняли дважды. Контрольные точки, как правило, брали из разных рейсов, то есть наблюдения на них выполнялись в разные дни.

Средняя квадратическая ошибка одного измерения определена как $m_p = \pm 0,24$ мгал. Гравиметрические наблюдения выполняли гравиметром ГАК-7 н. Изменение нуля-пункта этого гравиметра в течение 8—10 часов рабочего времени не превышало 1,5—1,8 мгал. Интервал измерения силы тяжести без перестройки диапазона составлял 64 мгал, с перестройкой до 2500 мгал. Отклонение от среднего из двух наблюдений силы тяжести, проведенных на одном и том же пункте и взятых из разных рейсов, не превышало 0,4—0,5 мгал.

Цену деления гравиметра определяли на эталонном гравиметрическом полигоне в июне 1968 г. и в мае 1969 г., и эта цена получена из двух наблюдений четырех пунктов с известной разностью силы тяжести между ними. По определению 1968 г. цена деления микрометра гравиметра $c = -4,34$ мгал, по определению 1969 г. $c = -4,33$ мгал, по паспорту $c = -4,35$ мгал. Цену деления можно считать надежно определенной и мало изменяющейся с течением времени величиной.

По основному участку ($l = 18$ км, $h \approx 1200$ м) получили 723 гравиметрические точки, в которых выполнены описанные выше измерения. Аналогичные измерения производились еще по двум трассам, расстояния и превышения между начальной и конечной точками которых были такими: $l = 2,5$ км; $h \approx 290$ м; $l = 5,9$ км; $h \approx 515$ м. Все это отдельные участки, не связанные между собой, расстояния между которыми равны 20—40 км.

Что касается поправки за температуру, то о ней можно сказать следующее. Кварцевая система и термометр изменение температуры воспринимают не совсем одинаково. Введение температурной поправки осложняется явлением температурной инерции: экстремумы графиков, построенных по отсчетам микрометра и термометра, не совпадают. При привязках к опорным пунктам не реже, чем через 4 часа, температурную поправку нужно учитывать вместе с поправкой за смещение нуля-пункта. Поскольку продолжительность времени между привязками к опорным пунктам не превышала 2,5—3 часа, то влияние изменения температуры учитывали вместе с поправкой за сползание нуля-пункта.

По всем измеренным гравиметрическим рейсам были построены редуccionные кривые для введения поправки за смещение нуля-пункта гравиметра.

Приращения силы тяжести $\Delta g_{\text{набл}}$ вычислены от условного уровня, за который принималась нивелирная марка.

На основе результатов гравиметрических наблюдений выполнена следующая работа:

- 1) построены графики изменения нуля-пункта гравиметра для всех опорных и рядовых рейсов;

- 2) вычислено $g_{\text{набл}}$ в условной системе всех опорных и рядовых гравиметрических точек с введением поправки за измерение нуля-пункта гравиметра;

3) составлена ведомость исходных данных (Δg , dh_i , h_A) для вычисления вертикального градиента силы тяжести (Δg и dh_i — приращения силы тяжести и высот смежных точек, h_A — превышение текущей точки A над маркой).

Формула для вычисления вертикального градиента силы тяжести. В точке A физической поверхности Земли имеет место разложение потенциала силы тяжести W в ряд Тейлора по направлению L [3]

$$W' = W + \frac{dW}{dL} L + \frac{d^2 W}{dL^2} \cdot \frac{L^2}{2} + \dots$$

Это разложение не вызывает сомнения, если L направлено во внешнее пространство; если L направлено во внутрь притягивающих масс, то его следует понимать как аналитическое продолжение внешнего потенциала, осуществляемое с помощью ряда Тейлора.

Полагая, что L — направление, совпадающее с линией отвеса в точке A , тогда

$$\frac{dW}{dL} = g, \quad \frac{d^2 W}{dL^2} = \frac{dg}{dn}.$$

Принимая еще условие, что $W' = W_0$, где W_0 — потенциал силы тяжести на уровне моря, получаем

$$W_0 = W + gH + \frac{1}{2} \frac{dg}{dn} H^2 + \dots$$

или

$$W_0 - W = gH + \frac{1}{2} \frac{dg}{dn} H^2 + \dots \quad (1)$$

Для разности потенциалов силы тяжести на уровне моря и в текущей точке известна формула

$$W_0 - W = \int g dh = \sum_{i=1}^n g_i dh_i. \quad (2)$$

Под выражением $g_i dh_i$ понимаем среднее значение силы тяжести между двумя близкими точками, умноженное на превышение между этими точками.

Учитывая (1) и (2), получаем

$$\frac{1}{h_A} \sum \frac{g_i + g_{i+1}}{2} dh_i - g_A = \frac{1}{2} \frac{dg}{dn} h_A. \quad (3)$$

Преобразуем формулу (3), исключив значение силы тяжести в исходной точке и оставив только приращение силы тяжести.

За исходную точку была принята нивелирная марка, от которой начинался нивелирно-гравиметрический ход. Значение силы тяжести в этой точке обозначим через g_0 , тогда

$$\frac{g_i + g_{i+1}}{2} = g_0 + \frac{\Delta g_i + \Delta g_{i+1}}{2},$$

где Δg_i и Δg_{i+1} — приращения силы тяжести соответственно в i -й и $(i+1)$ -й точке, отсчитываемые от марки. Поэтому формулу (3) можно записать так:

$$\frac{1}{h_A} \sum \left(g_0 + \frac{\Delta g_i + \Delta g_{i+1}}{2} \right) dh_i - (g_0 + \Delta g_A) = \frac{1}{2} \frac{dg}{dn} h_A. \quad (3')$$

Учитывая, что $\sum dh_i = h_A$, окончательно получаем

$$\frac{dg}{dn} h_A = \frac{1}{h_A} \sum_{i=1}^{i=A} (\Delta g_i + \Delta g_{i+1}) dh_i - 2\Delta g_A. \quad (4)$$

По формуле (4) были вычислены величины вертикального градиента силы тяжести для трех нивелирно-гравиметрических ходов, состоящих соответственно из 723, 75 и 67 точек.

Средние значения $\frac{dg}{dn}$ по трем ходам получились равными соответственно 0,214, 0,204 и 0,197 мгал/м.

По основному нивелирно-гравиметрическому ходу из 723 точек выбрано 175 точек в характерных по рельефу местах. Ниже помещена таблица значений $\frac{dg}{dn}$ для этих 175 точек в порядке возрастающих высот h_A .

Для приведенных в таблице 175 точек был вычислен коэффициент корреляционной зависимости $\frac{dg}{dn}$ от высоты h_A [1], причем получено $r = +0,43$. Среднее квадратическое отклонение коэффициента корреляции $\sigma(r) = 0,06$. Коэффициент корреляции был вычислен и для всех 723 точек хода, причем найдено, что $r_1 = +0,45$ и соответственно $\sigma(r_1) = 0,03$.

По двум другим ходам коэффициенты корреляции и их средние квадратические отклонения имеют такие значения: $r_2 = +0,79$; $\sigma(r_2) = 0,04$; $r_3 = +0,18$; $\sigma(r_3) = 0,18$.

Согласно формуле Романовского [1], корреляционная связь считается существующей, если $|r| \geq 3 \sigma(r)$ при $n > 50$. Из трех вычисленных ходов в первых двух можно считать установленной корреляционную зависимость $\frac{dg}{dn}$ от высоты.

Зависимость вычисленного вертикального градиента $\frac{dg}{dn}$ от пути нивелирования. Величина геопотенциала для фиксированной точки $W_0 - W = \sum g_i dh_i$ не зависит от пути нивелирования. Превышение же этой точки над исходной изменяется в зависимости от пути нивелирования. Покажем, как изменится вертикальный градиент $\frac{dg}{dn}$ с изменением отметки h_A на величину dh .

Для полного дифференциала от выражения (1) в фиксированной точке A , учитывая, что $W_0 - W = \text{const}$, а переменными являются величины h и $\frac{dg}{dn}$, получаем

$$0 = g_A dh + \left(\frac{dg}{dn} \right)_A h_A dh + \frac{1}{2} \Delta \frac{dg}{dn} h_A^2 - \Delta \frac{dg}{dn} = \left[\frac{2g_A}{h_A^2} + \left(\frac{dg}{dn} \right)_A \frac{2}{h_A} \right] dh. \quad (5)$$

Подставив в формулу (5) значения, полученные из вычисления нивелирно-гравиметрического хода ($h_A = 1185,15$ м, $g_A = 979736,47$ мгал, $\left(\frac{dg}{dn} \right)_A = +0,222$ мгал/м), и считая, что $dh = +0,02$ м, находим:

$$\Delta \frac{dg}{dn} = -0,028 \text{ мгал/м.}$$

Значения вертикальных градиентов силы тяжести*

$h, м$	$\frac{dg}{dn}, мгал/м$	$h, м$	$\frac{dg}{dn}, мгал/м$	$h, м$	$\frac{dg}{dn}, мгал/м$
+ 11	+ 0,2124	+ 531	+ 0,2131	+ 919	+ 0,2167
20	0,2298	542	0,2126	930	0,2169
31	0,2234	554	0,2115	932	0,2180
41	0,2051	565	0,2106	943	0,2179
52	0,2036	580	0,2109	953	0,2176
63	0,2028	593	0,2113	960	0,2175
72	0,1975	606	0,2110	964	0,2175
83	0,1969	617	0,2118	973	0,2176
94	0,1968	626	0,2121	986	0,2191
105	0,1983	634	0,2130	997	0,2195
117	0,1951	641	0,2119	1003	0,2200
126	0,2008	651	0,2108	1008	0,2204
138	0,2014	662	0,2110	1016	0,2210
149	0,2062	672	0,2110	1028	0,2208
159	0,2042	681	0,2100	1035	0,2210
165	0,2013	688	0,2086	1040	0,2219
173	0,2036	694	0,2088	1044	0,2230
174	0,2023	703	0,2084	1041	0,2224
175	0,2021	707	0,2088	1036	0,2225
175	0,2038	715	0,2095	1027	0,2222
172	0,2068	724	0,2098	1017	0,2222
167	0,2112	730	0,2100	1006	0,2220
167	0,2094	739	0,2103	995	0,2227
176	0,2089	746	0,2098	982	0,2216
186	0,2080	753	0,2101	974	0,2208
198	0,2054	762	0,2106	980	0,2216
206	0,2082	769	0,2113	987	0,2220
213	0,2081	773	0,2119	1001	0,2236
225	0,2103	773	0,2107	1009	0,2252
236	0,2116	775	0,2115	1015	0,2253
246	0,2119	775	0,2123	1013	0,2208
256	0,2126	773	0,2129	1005	0,2137
268	0,2116	776	0,2147	1009	0,2120
280	0,2139	776	0,2128	1015	0,2126
291	0,2153	776	0,2115	1009	0,2120
299	0,2144	776	0,2106	1002	0,2100
307	0,2172	778	0,2111	1011	0,2100
314	0,2200	777	0,2109	1011	0,2099
327	0,2204	777	0,2104	1010	0,2093
338	0,2224	786	0,2115	1018	0,2096
349	0,2240	794	0,2111	1029	0,2107
356	0,2258	804	0,2124	1039	0,2115
362	0,2265	811	0,2122	1040	0,2104
373	0,2246	814	0,2125	1048	0,2114
386	0,2233	814	0,2120	1062	0,2126
395	0,2236	812	0,2118	1074	0,2136
409	0,2218	814	0,2111	1088	0,2140
422	0,2205	822	0,2118	1098	0,2142
432	0,2197	831	0,2115	1108	0,2144
445	0,2162	841	0,2131	1118	0,2139
456	0,2177	845	0,2135	1126	0,2142
468	0,2180	847	0,2135	1130	0,2142
479	0,2164	858	0,2140	1140	0,2156
486	0,2152	869	0,2150	1156	0,2175
493	0,2164	880	0,2151	1167	0,2189
504	0,2179	890	0,2158	1175	0,2200
514	0,2153	899	0,2165	1180	0,2206
521	0,2130	908	0,2167	1185	0,2215
527	0,2138				

* Среднее арифметическое по ходу $\frac{dg}{dn} = + 0,214 мгал/м$. Среднее квадратическое отклонение от арифметической середины $m = \pm \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{n-1}} = \pm 6 \cdot 10^{-3} мгал/м$.

Мы получили результат, свидетельствующий о том, что вычисленная величина вертикального градиента силы тяжести заметно зависит от пути нивелирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайдаев П. А., Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений. «Недра», М., 1969.
2. Маловичко А. К. Основной курс гравиразведки, часть I. Пермь, 1966.
3. Мигаль Н. К. Несколько слов об основных проблемах теории фигуры Земли. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1965.

Работа поступила
21 октября 1970 г.