

В. А. ЛАДЕЙЩИКОВА

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

Нормальные уравнения с коэффициентами в виде трехдиагональной матрицы встречаются часто при уравнивании заполняющих сетей геодезических построений.

Пусть имеем систему нормальных уравнений коррелат в матричной форме

$$NK + W = 0, \quad (1)$$

где K и W — матрицы-столбцы,

$$\begin{aligned} K &= (k_1, k_2, \dots, k_n); \\ W &= (w_1, w_2, \dots, w_n), \end{aligned} \quad (2)$$

N — квадратная трехдиагональная симметричная матрица;

$$N = \|a_{ij}\| \quad (i=j). \quad (3)$$

Так как матрица N неособенная ($N \neq 0$), то

$$K = -N^{-1}W, \quad (4)$$

где

$$K_i = - \sum_{j=1}^n a_{ij}^{-1} W_j \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, n, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

При большом значении n вычисление элементов матрицы N^{-1} связано с трудностями, поэтому важную роль играют эффективные методы вычисления элементов обратной матрицы.

Для решения системы (1) предлагаем такой путь.

Исходная матрица N имеет вид:

$$N = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & & a_{23} \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a_{n-1, n-2} & a_{n-1, n-1} & a_{n-1, n} \\ & & a_{n, n-1} & a_{n, n} \end{array} \right\|. \quad (6)$$

Умножая слева выражение (1) на преобразующую матрицу q

$$q = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & q_{12} & & \\ q_{21} & 1 & q_{23} & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & q_{n-1, n-2} & 1 & q_{n-1, n} \\ & & q_{n, n-1} & 1 \end{array} \right\|, \quad (7)$$

где

$$q_{jj} = 1; \quad \begin{aligned} q_{ij} &= -a_{ij} a_{jj}^{-1}; & | i = 1, 2, \dots, n, \\ q_{ji} &= -a_{ji} a_{ii}^{-1}, & | j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (8)$$

получаем

$$qNK + qW = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$qN = N^{(1)}; \quad qW = W^{(1)}; \quad (10)$$

$$N^{(1)}K + W^{(1)} = 0, \quad (11)$$

где

$$N^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & 0 & a_{13}^{(1)} & & \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 & a_{24}^{(1)} & \\ a_{31}^{(1)} & 0 & a_{33}^{(1)} & 0 & a_{35}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{n-1, n-3}^{(1)} & 0 & a_{n-1, n-1}^{(1)} & 0 \\ & & a_{n, n-2}^{(1)} & 0 & a_{n, n}^{(1)} \end{vmatrix},$$

$$a_{ii}^{(1)} = a_{ii} - \sum_{\substack{j=i-1 \\ j>0}}^{j=i+1} a_{ij} a_{jj}^{-1} a_{ji} = a_{ii} + \sum_{\substack{j=i+1 \\ j>0}}^{j=i+1} q_{ij} a_{ji},$$

$$\begin{aligned} a_{i, j+1}^{(1)} &= -a_{i, j+1} a_{jj}^{-1} a_{j, j+1} = q_{i, j} a_{j+1, i}; & | i = 1, 2, \dots, n, \\ a_{j+1, i}^{(1)} &= -a_{j+1, i} a_{ii}^{-1} a_{i, j+1} = q_{j+1, i} a_{i, j+1}; & | j = 1, 2, \dots, n. \\ a_{i, i+1}^{(1)} &= a_{j+1, i}^{(1)}; \end{aligned}$$

$$W_i^{(1)} = W_i - \sum_{\substack{j=i-1 \\ j>0}}^{j=i+1} a_{ij} a_{jj}^{-1} W_j = W_i + \sum_{\substack{j=i+1 \\ j>0}}^{j=i+1} q_{ij} W_j. \quad (12)$$

После $(s+1)$ -преобразований получаем

$$q^{(s)} N^{(s)} K + q^{(s)} W^{(s)} = 0; \quad q^{(s)} N^{(s)} = N^{(s+1)}; \quad q^{(s)} W^{(s)} = W^{(s+1)}; \\ N^{(s+1)} K + W^{(s+1)} = 0, \quad (13)$$

где

$$N^{(s+1)} = \begin{vmatrix} a_{11}^{(s+1)} & & & \\ & a_{22}^{(s+1)} & & \\ & & a_{n-1, n-1}^{(s+1)} & \\ & & & a_{n, n}^{(s+1)} \end{vmatrix}; \quad W^{(s+1)} = \begin{vmatrix} W_1^{(s+1)} \\ W_2^{(s+1)} \\ W_{n-1}^{(s+1)} \\ W_n^{(s+1)} \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{ii}^{(s+1)} &= a_{ii}^{(s)} - \sum_{\substack{j=i-2^s \\ j>0}}^{j=i+2^s} a_{ij}^{(s)} (a_{jj}^{(s)})^{-1} a_{ji}^{(s)}; & | j = 1, 2, \dots, n; \\ a_{ii}^{(s+1)} &= a_{ii}^{(s)} + \sum_{\substack{j=i-2^s \\ j>0}}^{j=i+2^s} q_{ij}^{(s)} a_{ji}^{(s)}, & | i = 1, 2, \dots, n; \\ & & | s = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

$$W_i^{(s+1)} = W_i^{(s)} - \sum_{\substack{j=i-2^s \\ j>0}}^{j=i+2^s} a_{ij}^{(s)} a_{jj}^{(s)} a_{ji}^{(s)} = W_i^{(s)} + \sum_{\substack{j=i+2^s \\ j>0}}^{j=i+2^s} q_{ij}^{(s)} a_{ji}^{(s)}.$$

Определяем элементы промежуточных диагоналей $N^{(s)}$

$$\begin{aligned} a_{i,j+2^{s-1}}^{(s)} &= -a_{ij}^{(s-1)} (a_{jj}^{(s-1)})^{-1} a_{j,j+2^{s-1}}^{(s-1)} = q_{ij}^{(s-1)} a_{j,j+2^{s-1}}^{(s-1)}, \\ a_{j+2^{s-1},i}^{(s)} &= -a_{ji}^{(s-1)} (a_{ii}^{(s-1)})^{-1} a_{j+2^{s-1},i}^{(s-1)} = q_{ji}^{(s-1)} a_{j+2^{s-1},i}^{(s-1)}, \\ a_{i,j+2^{s-1}}^{(s)} &= a_{j+2^{s-1},i}^{(s)} \quad \left| \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n; \\ j = i + 2^{s-1}; \\ s = 0, 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (15)$$

Из выражения (13) находим

$$k_i = -W_i^{(s+1)} (N^{(s+1)})^{-1}. \quad (16)$$

Матрица $N^{(s+1)}$ диагональна, и элементы обратной матрицы получить легко [1].

Описанную выше методику решений можно применять при уравнивании одиночных и сдвоенных рядов однотипных фигур геодезических построений, а также при уравнивании групповым методом сплошных свободных сетей из однотипных фигур. В последнем случае исходную матрицу коэффициентов нормальных уравнений коррелат II группы нужно представить в виде квазитрехдиагональной, если ее разбить на клетки и назвать их подматрицами. Они будут квадратными трехдиагональными неособенными матрицами одинакового порядка. Пусть исходная матрица имеет вид

$$N = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_{11} & N_{12} & & & & & & \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & & & & \\ & & N_{n-2, n-1} & N_{n-1, n-1} & N_{n-1, n} & & & \\ & & & N_{n, n-1} & N_{n, n} & & & \end{array} \right) \quad N_{ij} = N_{ji}. \quad (17)$$

В результате ряда преобразований исходная матрица будет представлена в виде отдельных квадратных матриц меньшего порядка, что значительно облегчит дальнейшее решение системы. Для матрицы N имеем матрицу R преобразования

$$R = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} E & R_{12} & & & & & & \\ R_{21} & E & R_{23} & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & & & & \\ & & R_{n-2, n-1} & E & R_{n-1, n} & & & \\ & & & R_{n, n-1} & E & & & \end{array} \right), \quad (18)$$

у которой на главной диагонали единичные подматрицы, а элементы кодиagonalей определяются так:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= -N_{ij} N_{jj}^{-1}; & i=1, 2, \dots, n, \\ R_{ii} &= -N_j N_{ii}^{-1}. & j=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (19)$$

После $(s+1)$ -преобразований получаем

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline N_{11}^{(s+1)} & & & & \\ \hline & N_{22}^{(s+1)} & & & \\ \hline & & \ddots & & \\ \hline & & & N_{n-1, n-1}^{s+1} & \\ \hline & & & & N_{n, n}^{(s+1)} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline k_1 \\ \hline k_2 \\ \hline \vdots \\ \hline k_{n-1} \\ \hline k_n \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline W_1^{(s+1)} \\ \hline W_2^{(s+1)} \\ \hline \vdots \\ \hline W_{n-1}^{(s+1)} \\ \hline W_n^{(s+1)} \\ \hline \end{array} = 0, \quad (20)$$

откуда

$$K_i = -W_i^{(s+1)} \cdot (N_{ii}^{(s+1)})^{-1}, \quad (21)$$

$N^{(s+1)}$ — матрица квазидиагональная, элементы которой определяются по формуле

$$N_{ii}^{(s+1)} = N_{ii}^{(s)} - \sum_{\substack{j=i-2^s \\ j>0}}^{j=i+2^s} N_{ij}^{(s)} (N_{jj}^{(s)})^{-1} N_{ji}^{(s)} = N_{ii}^{(s)} + \sum_{\substack{j=i-2^s \\ j>0}}^{j=i+2^s} R_{ij}^{(s)} N_{ji}^{(s)}. \quad \left| \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, n; \\ j=1, 2, \dots, n; \\ s=0, 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (22)$$

Столбец свободных членов вычисляют по такой формуле:

$$W_i^{(s+1)} = W_i^{(s)} - \sum_{\substack{j=i-2^s \\ j>0}}^{j=i+2^s} N_{ij}^{(s)} (N_{jj}^{(s)})^{-1} W_j^{(s)} = W_i^{(s)} + \sum_{\substack{j=i-2^s \\ j>0}}^{j=i+2^s} R_{ij}^{(s)} W_j^{(s)} \quad \left| \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, n, \\ j=1, 2, \dots, n, \\ s=0, 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (23)$$

Элементы промежуточных диагоналей определяются так:

$$\begin{aligned} N_{i, j+2^{s-1}}^{(s)} &= R_{ij}^{(s-1)} N_{j, j+2^{s-1}}^{(s-1)}; & R_{ij}^{(s-1)} &= -N_{ij}^{(s-1)} (N_{jj}^{(s-1)})^{-1} & \left| \begin{array}{l} i=1, 2, 3 \dots n, \\ j=i+2^{s-1}, \\ s=1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \\ N_{j+2^{s-1}, i}^{(s)} &= R_{ji}^{(s-1)} N_{j+2^{s-1}, i}^{(s-1)}; & R_{ji}^{(s-1)} &= -N_{ji}^{(s-1)} (N_{ii}^{(s-1)})^{-1} \\ N_{j+2^{s-1}, i}^{(s)} &= N_{i, j+2^{s-1}}^{(s)} \end{aligned} \quad (24)$$

В результате каждого преобразования кодиagonalей смещается и занимает место $1^{(s)}$ от главной диагонали.

Установлено, что если исходная матрица имеет две кодиагонали, расположенных симметрично главной диагонали, то каждая из них будет смещаться от главной диагонали по такому закону:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0, \quad t^{(0)} = 2, \\ s_2 &= 1, \quad t^{(1)} = 2 + 2^0 = 3, \\ s_3 &= 2, \quad t^{(2)} = 2 + 2^0 + 2^1 = 5, \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= s, \quad t^{(s)} = t^{(s-1)} + 2^{s-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$t^{(s)} = 2 + \sum_{s=0}^{s-1} 2^{s-1}. \quad (26)$$

Учитывая, что

$$\sum_{s=0}^{s-1} 2^{s-1} = S^{(s)} = \frac{a_1(1 - 2^s)}{1 - 2} = 2^s - 1 \quad a_1 = 2^0 = 1, \quad (27)$$

где $S^{(s)}$ — сумма членов геометрической прогрессии, формулу (26) можно записать в виде

$$t^{(s)} = 1 + 2^s. \quad (28)$$

Очевидно, что для приведения исходной матрицы к диагональному или квазидиагональному виду понадобится преобразований $(s+1)$. Зная порядок матрицы n и место кодиагонали $t^{(s)}$, после очередного преобразования исходной матрицы можно определить число преобразований d :

$$\begin{aligned} \text{при } n \geq t^{(s)} \quad d &= s+1; \\ \text{при } n < t^{(s)} \quad d &= s. \end{aligned} \quad (29)$$

Например:

$$\begin{aligned} n=5, \quad s_1 &= 2, \quad t^{(s)} = 5, \quad n=5, \quad d=s+1=3, \\ s_2 &= 3, \quad t^{(3)} = 9, \quad n < 9, \quad d=s=3. \\ n=12, \quad s_1 &= 3, \quad t^{(3)} = 9, \quad n > 9, \quad d=s+1=4, \\ s_2 &= 4, \quad t^{(4)} = 17, \quad n < 17, \quad d=s=4. \\ n=130, \quad s_1 &= 7, \quad t^{(7)} = 1 + 2^7 = 129, \\ s_2 &= 8, \quad t^{(8)} = 1 + 2^8 = 257, \\ n &> t^{(7)}, \quad d=s+1=8, \\ n &< t^{(8)}, \quad d=s=8; \\ n=260, \quad s_1 &= 8, \quad t^{(8)} = 257, \\ s_2 &= 9, \quad t^{(9)} = 1 + 2^9 = 513, \\ n &> t^{(8)}, \quad d=s+1=9, \\ n &< t^{(9)}, \quad d=s=9. \end{aligned}$$

Из приведенных примеров видно, что со значительным увеличением порядка матрицы число преобразований увеличивается относительно медленно.

Числовой пример. Исходная матрица

$$\left\| \begin{array}{cccc} 15 & -2 & & \\ -2 & 12 & -2 & \\ & -2 & 12 & -2 \\ & & -2 & 15 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{array} \right\| + 4 \left\| \begin{array}{c} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{array} \right\| = 0. \quad (30)$$

Для решения системы (30) потребуется преобразований:

$$\begin{aligned} n=4, \quad s=1, \quad t^{(s)}=3, \quad n > t^{(s)}, \quad d=s+1=2, \\ s=2, \quad t^{(s)}=5, \quad n < t^{(s)}, \quad d=s=2. \end{aligned}$$

Элементы преобразующей матрицы:

$$\begin{aligned} q_{12} &= \frac{1}{6}, \quad q_{23} = \frac{1}{6}, \quad q_{34} = \frac{2}{15}, \quad q_{ij} = -a_{ij} a_{jj}^{-1}, \\ q_{11} &= \frac{2}{15}, \quad q_{31} = \frac{1}{6}, \quad q_{43} = \frac{1}{6}, \quad q_{ji} = -a_{ji} a_{ii}^{-1}, \end{aligned}$$

После первого преобразования согласно (12) получаем элементы матрицы:

$$a_{11}^{(1)} = a_{11} + q_{12} a_{21} = \frac{44}{3}; \quad i_1=1, \quad s=0, \quad j=2.$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} + q_{21} a_{12} + q_{23} a_{32} = \frac{171}{15}; \quad i_2=2, \quad s=0, \quad j_1=2, \quad j_2=1.$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{33} + q_{32} a_{23} + q_{34} a_{43} = \frac{171}{15}; \quad i_3=3, \quad s=0, \quad j_1=2, \quad j_2=4.$$

$$a_{44}^{(1)} = a_{44} + q_{43} a_{34} = \frac{44}{3}; \quad i_4=4, \quad s=0, \quad j_1=3.$$

$$W_1^{(1)} = W_1 + q_{12} W_2 = W_1 + \frac{1}{6} W_2;$$

$$W_2^{(1)} = W_2 + q_{21} W_1 + q_{23} W_3 = W_2 + \frac{2}{15} W_1 + \frac{1}{6} W_3;$$

$$W_3^{(1)} = W_3 + q_{32} W_2 + q_{34} W_4 = W_3 + \frac{1}{6} W_2 + \frac{2}{15} W_4;$$

$$W_4^{(1)} = W_4 + q_{43} W_3 = W_4 + \frac{1}{6} W_3;$$

$$a_{13}^{(1)} = q_{12} a_{23} = -\frac{1}{3}, \quad a_{13}^{(1)} = a_{31}^{(1)}, \quad i_1=1, \quad s=1, \quad j=2,$$

$$a_{24}^{(1)} = q_{13} a_{34} = -\frac{1}{3}, \quad a_{24}^{(1)} = a_{42}^{(1)}, \quad i_2=2, \quad s=1, \quad j=3.$$

Исходная матрица после первого преобразования имеет следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{44}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{171}{15} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{171}{15} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{44}{3} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{array} \right\| + 4 \left\| \begin{array}{c} W_1 + \frac{1}{6} W_2 \\ W_2 + \frac{2}{15} W_1 + \frac{1}{6} W_3 \\ W_3 + \frac{1}{6} W_2 + \frac{2}{15} W_4 \\ W_4 + \frac{1}{6} W_3 \end{array} \right\| = 0.$$

Элементы второй преобразующей матрицы:

$$q_{13}^{(1)} = \frac{5}{171}, \quad q_{24}^{(1)} = \frac{1}{44}, \quad q_{31}^{(1)} = \frac{1}{44}, \quad q_{42}^{(1)} = \frac{5}{171},$$

$$q_{ij}^{(1)} = -a_{ij}^{(1)} a_{jj}^{(1)-1}, \quad q_{ji}^{(1)} = -a_{ji}^{(1)} a_{ii}^{(1)-1}.$$

После второго преобразования получим диагональную матрицу с элементами:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)} &= a_{11}^{(1)} + q_{13}^{(1)} a_{31}^{(1)} = \frac{7519}{513}; & i_1 &= 1, s = 1. \\ & & j_1 &= -1; j < 0. \\ a_{22}^{(2)} &= a_{22}^{(1)} + q_{24}^{(1)} a_{42}^{(1)} = \frac{7519}{660}; & j_2 &= 3; \\ & & i_2 &= 2, s = 1, j_1 = 0. \\ a_{33}^{(2)} &= a_{33}^{(1)} + q_{31}^{(1)} a_{13}^{(1)} = \frac{7519}{660}; & j_3 &= 4. \\ & & i_3 &= 3, s = 1, j_1 = 1, j_2 = 5. \\ a_{44}^{(2)} &= a_{44}^{(1)} + q_{42}^{(1)} a_{24}^{(1)} = \frac{7519}{513}; & n &= 4. \\ & & i_4 &= 4, s = 1, j_1 = 2, j_2 = 6, j_3 > n. \end{aligned}$$

Свободные члены:

$$\begin{aligned} W_1^{(2)} &= W_1^{(1)} + q_{13}^{(1)} W_3^{(1)} = \frac{513 w_1 + 88 w_2 + 15 w_3 + 2 w_4}{513}; \\ W_2^{(2)} &= W_2^{(1)} + q_{24}^{(1)} W_4^{(1)} = \frac{176 w_1 + 1320 w_2 + 225 w_3 + 30 w_4}{1320}; \\ W_3^{(2)} &= W_3^{(1)} + q_{31}^{(1)} W_1^{(1)} = \frac{30 w_1 + 225 w_2 + 1320 w_3 + 176 w_4}{1320}; \\ W_4^{(2)} &= W_4^{(1)} + q_{42}^{(1)} W_2^{(1)} = \frac{2 w_1 + 15 w_2 + 88 w_3 + 513 w_4}{513}. \end{aligned}$$

Общий вид матрицы после второго преобразования:

$$\begin{vmatrix} \frac{7519}{513} & & & \\ & \frac{7519}{660} & & \\ & & \frac{7519}{660} & \\ & & & \frac{7519}{513} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{2052 w_1 + 352 w_2 + 60 w_3 + 8 w_4}{513} \\ \frac{352 w_1 + 2640 w_2 + 450 w_3 + 60 w_4}{660} \\ \frac{60 w_1 + 450 w_2 + 2640 w_3 + 352 w_4}{660} \\ \frac{8 w_1 + 60 w_2 + 352 w_3 + 2052 w_4}{513} \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда коррелаты функции свободных членов выразим так:

$$\begin{aligned} -k_1 &= \frac{2052 w_1 + 352 w_2 + 60 w_3 + 8 w_4}{7519}; \\ -k_2 &= \frac{352 w_1 + 2640 w_2 + 450 w_3 + 60 w_4}{7519}; \\ -k_3 &= \frac{60 w_1 + 450 w_2 + 2640 w_3 + 352 w_4}{7519}; \\ -k_4 &= \frac{8 w_1 + 60 w_2 + 352 w_3 + 2052 w_4}{7519}. \end{aligned}$$

Указанный способ решения систем нормальных уравнений коррелат может быть использован при уравнивании сведенных рядов и сплошных сетей из однотипных фигур, когда исходная матрица требует разбивки

на клетки и уничтожения связи между ними. Этот способ может быть использован для получения обратной матрицы, если исходная матрица трехдиагональна и большого порядка.

Наличие большого количества нулей в исходной матрице, однотипность операций преобразований позволяет эффективно использовать большие и малые ЭЦВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. «Наука», М., 1967.
2. Филин А. П. Матрицы в статике стержневых систем. Изд-во литературы по строительству, Л., 1966.

Работа поступила
11 ноября 1970 г.