РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 14

УДК 528.482:69.058.2

А. Г. ГРИГОРЕНКО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНЕЙШИХ ЗНАЧЕНИЙ ДЕФОРМАЦИЙ СООРУЖЕНИЙ И ПОВЕРХНОСТИ ПО ДАННЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

При исследовании деформаций земной поверхности и инженерных сооружений полученные результаты наблюдений искажаются влиянием колебаний, не связанных с процессом деформаций. К таким помехам можно отнести действие случайных ошибок наблюдений, влияние температуры, интенсивные динамические нагрузки и др.

Пусть процесс деформации в момент времени t описывается функцией $f(t)$. Хотя $f(t)$ — непрерывная функция времени, ее значение можно найти лишь для дискретных значений аргумента. Полученные из наблюдений значения деформаций обозначаем через $\varphi(t)$. Очевидно, что

$$\varphi(t)=f(t)+\gamma(t), \tag{1}$$

где $\gamma(t)$ — также дискретная функция времени, представляющая собой искажение наблюдений.

Задача обработки наблюденного материала заключалась в следующем: 1) найти функцию $f(t)$; 2) дать характеристику совокупности влияний возмущающих колебаний $\gamma(t)$ с целью оценки их влияния на результаты наблюдений $\varphi(t)$. Для решения задачи мы применили метод, разработанный в теории случайных функций [1, 5] и использованный нами в [4].

Рассматривая $\varphi(t)$ как случайную функцию времени, для каждого момента t можно найти ее математическое ожидание. В нашем случае это будет функция $f(t)$, которая описывает искомый процесс деформации.

Так как наблюдения дают лишь одну реализацию $\varphi(t)$, то точное определение $f(t)$ невозможно, и мы можем получить лишь некоторую функцию $\overline{f}(t)$, с наибольшей вероятностью отражающей функцию $f(t)$.

Исключив из реализации ее математическое ожидание, находим случайную последовательность

$$\gamma(t)=\varphi(t)-\overline{f}(t), \tag{1'}$$

математическое ожидание которой считаем равным нулю. Это условие тем точнее отражает действительность, чем лучше приближение функции $\overline{f}(t)$ к функции $f(t)$.

Пусть теперь последовательность $\gamma(t)$ является стационарной.

Из [2] известно, что всякую стационарную последовательность с математическим ожиданием, равным нулю, можно представить в виде

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t}\, dA(\omega), \tag{2}$$

где $dA(\omega)$ — случайная функция частоты ω.
Кроме того, приращения $dA(\omega)$ функции $A(\omega)$ не зависимы и

$$M[dA(\omega)]^2 = S(\omega)\, d\omega, \tag{3}$$

где M — символ математического ожидания; $S(\omega)$ — неслучайная, непрерывная, положительная функция аргумента ω, и называется она спектральной плотностью в интервале $d(\omega)$.

Кроме того, известно [2], что корреляционная функция и спектральная плотность случайной стационарной последовательности связаны соотношением

$$B(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} S(\omega)\, d\omega, \tag{4}$$

где $\tau = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Приняв здесь, что $\Delta t = 1$, находим

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} B(\tau). \tag{5}$$

Следовательно, функция $S(\omega)$ и $B(\tau)$ образуют пару Фурье, так как корреляционная функция однозначно определяется заданием спектральной плотности и наоборот.

Для вещественных случайных последовательностей выражения (4) и (5) имеют вид

$$B(\tau) = 2\int_{0}^{\pi} S(\omega) \cos \omega\tau\, d\omega, \tag{6}$$

$$S(\omega) = \delta \frac{1}{\pi} \sum_{0}^{\infty} B(\tau) \cos \omega\tau, \tag{7}$$

где

$$\delta = \begin{cases} 1/2 & \text{при} \quad \tau = 0, \\ 1 & \text{при} \quad \tau > 0. \end{cases}$$

Полагая в (6) $\tau = 0$, определяем

$$D\gamma = 2\int_{0}^{\pi} S(\omega)\, d\omega, \tag{8}$$

то есть площадь под кривой $S(\omega)$ на всем интервале изменения частот $(-\pi, \pi)$ равна дисперсии случайной функции $\gamma(t)$.

Если $\Delta t \neq 1$, то в (6) верхний предел π следует заменить на

$$\omega_N = \frac{2\pi}{2\Delta t}. \tag{9}$$

Тогда формулы (6) и (8) преобразуются в следующие:

$$B(\tau)=2\int\limits_0^{\omega_N} S(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega, \tag{10}$$

$$D\gamma=2\int\limits_0^{\omega_N} S(\omega)\, d\omega. \tag{11}$$

Но так как для данного случая нет оснований считать, что колебания с частотами выше ω_N вносят лишь незначительный вклад в дисперсию, то под $D\gamma$, найденной из (11), нужно понимать не всю дисперсию случайной последовательности, а только часть ее, приходящуюся на определенную область частот $(-\omega_N, \omega_N)$.

Кроме того, в практике исследования деформаций сооружений и земной поверхности мы всегда имеем конечную во времени реализацию случайной последовательности.

Пусть $\gamma(t)$ состоит из n конечных значений, заданных через равные интервалы (циклы наблюдений) времени Δt:

$$\gamma(t_1),\ \gamma(t_2), \ldots,\ \gamma(t_n),$$

где $\Delta t=t_{i+1}-t_i$, а число реализаций равно l.

В этом случае оценка спектральной плотности равна

$$S(\omega)=\frac{4}{2n-1}\,\delta\sum_{\tau=0}^{n-1} B(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{n}\right)\cos\omega_k\tau, \tag{12}$$

где $\omega_k=k\omega_0$, причем $\omega_0=\dfrac{\pi}{n}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$. Для корреляционной функции имеем выражение

$$B(\tau)=\frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau}\gamma(i)\,\Sigma(i+\tau), \tag{13}$$

где $N=1, 2, 3, \ldots$

Введем теперь вместо $B(\tau)$ нормированную корреляционную функцию

$$b(\tau)=\frac{B(\tau)}{B(0)}. \tag{14}$$

Формула (12) принимает вид

$$\frac{S(\omega_k)}{2B(0)}=\frac{1}{2n-1}\left[2\sum_{\tau=1}^{n-1} b(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{n}\right)\cos\omega_k\tau+1\right]. \tag{15}$$

Точность σ_S вычисления $S(\omega_k)$ можно определить равенством

$$\frac{\sigma_S}{S(\omega_k)}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{n}{N}}. \tag{16}$$

Выражение $\left(1-\dfrac{|\tau|}{n}\right)$ в (15) представляет собой весовую функцию, которая вводится для уменьшения ошибки в оценке спектра.

Из (15) видно, что при выборе $n<N$ сглаживгние истинного спектра тем сильнее, чем меньше n.

Пусть теперь в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$ получены значения $\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_N)$ искомой величины $f(t)$. Сглаживание в большинстве случаев — это некоторое осреднение значений $\varphi(t_i)$. Следовательно, не что иное, как линейное преобразование наблюденных значений [2].

Обозначим оператор такого преобразования через L. Тогда, согласно выражению (1), можно записать

$$L\varphi(t) = Lf(t) + L\gamma(t). \tag{17}$$

Требование, которому должен удовлетворять оператор L, заключается в том, чтобы применение его к функции $f(t)$ практически ее не изменяло. Следовательно, вместо (17) можно написать

$$L\varphi(t) = f(t) + L\gamma(t). \tag{18}$$

Для нахождения коэффициентов оператора L положим: 1) $\varphi(t_i)$ заданы для равноотстоящих значений аргумента; 2) все наблюдения равноточны; 3) влияющие колебания — суть последовательность случайных независимых величин. Кроме того, введем количественные меры достоверности исключения влияющих колебаний и согласия полученной кривой с процессов деформации.

В качестве первой, согласно [5], принимаем величину

$$H = \sum_{i=1}^{N-3} [\Delta^3\varphi'(t_i)]^2, \tag{19}$$

где

$$\Delta^3\varphi'(t_i) = \varphi'(t_{i+3}) - 3\varphi'(t_{i+2}) + 3\varphi'(t_{i+1}) - \varphi'(t_i),$$

то есть третья конечная разность значений

$$\varphi'(t_i) = L\varphi(t).$$

За меру согласия сглаженной кривой и процесса деформации принимаем величину

$$E = \sum_{i=1}^{N} h^2 [\varphi(t_i) - \varphi'(t_i)]^2, \tag{20}$$

где h — мера точности наблюдений $\varphi(t_i)$.

Образуем теперь величину

$$P = \lambda^2 H + E, \tag{21}$$

где λ — некоторое произвольное число, определяющее соотношение между H и E.

Придавая λ различные значения, можно установить требуемую степень сглаживания. В [5] показано, что величины $\varphi'(t_i)$, при которых P принимает наименьшее значение, лежат на кривой, которая с наибольшей вероятностью отображает рассматриваемый процесс и определяется из условия

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi'(t_i)} = 0. \tag{22}$$

Обозначим

$$\frac{h^2}{\lambda^2} = \varepsilon. \tag{23}$$

Эта величина в теории случайных функций называется степенью сглаживания. Искомое значение $\varphi'(t_i)$ определяется из выражения [5]:

$$\varphi'(t_i) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} K_p \varphi(t_{i+p}), \tag{24}$$

где $K_p = K_{-p}$.

Следовательно, коэффициентами оператора L являются величины K_p, совокупность которых зависит от ε, и они могут быть получены из специальных таблиц [5].

Заметим, что коэффициенты K_p уменьшаются по модулю с увеличением p, причем скорость их убывания и величина K_0 зависят от ε. При большем ε большее K_0 и быстрее убывает K_p. Кроме того, при любом ε выполняется условие

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} K_p = 1. \tag{25}$$

Выясним теперь, как преобразование $\varphi(t_i)$ влияет на случайную последовательность $\gamma(t)$. По аналогии с (24) можно записать

$$\gamma'(t_i) = L\gamma(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} K_p \gamma(t_{i+p}). \tag{26}$$

Обозначим через $S'(\omega)$ спектральную плотность последовательности $\gamma'(t)$. Из [2] известно, что $S(\omega)$ и $S'(\omega)$ связаны между собой соотношением

$$S'(\omega) = |f(\omega)|^2 S(\omega), \tag{27}$$

где $f(\omega)$ — частотная характеристика оператора L, называемая часто его передаточной функцией.

Функция $f(\omega)$ зависит только от вида оператора и может быть представлена в виде

$$f(\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} K_p e^{irp\omega}, \tag{28}$$

где

$$r = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad p \geqslant 0, \\ \ \ 1, & \text{если} \quad p < 0. \end{cases}$$

Но так как $K_p = K_{-p}$, то (28) принимает вид

$$f(\omega) = K_0 + 2\sum_{p=1}^{\infty} K_p \cos p\omega. \tag{29}$$

Таким образом, линейный оператор L в данном методе играет роль низкочастотного фильтра. Этот фильтр пропускает лишь определенную область частот от 0 до некоторого $\omega = \omega'$, где уже $f(\omega') = 0$. Колебания с частотами, близкими к ω', задерживаются, и тем сильнее, чем больше их частота.

Колебания с частотами больше ω' практически не влияют на сглаженную кривую.

Практические приемы такого сглаживания можно найти в работах [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бартлет М. С. Введение в теорию случайных процессов. Л., 1958.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, М., 1958.
3. Григоренко А. Г. Об учете возмущающих колебаний при наблюдении микросдвижений земной поверхности. В сб. «Инженерная геодезия», вып. 1, Киев, 1965.
4. Григоренко А. Г. Определение скрытого периода сдвижений земной поверхности. В сб. «Инженерная геодезия», вып. 2, Киев, 1966.
5. Уиттекер Э. и Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений, Гостехтеориздат, М., 1933.

Работа поступила
28 апреля 1969 года