

Н. К. МИГАЛЬ, Р. Р. ИЛЬКИВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ СИСТЕМ ВЫСОТ

Нами ставится задача — найти дифференциальные формулы некоторых систем высот, связывающие дифференциал высоты рассматриваемой системы с дифференциалом измеренной высоты и вытекающие из них следствия.

Любая система высот получается путем приравнивания геопотенциала некоторому выражению, содержащему искомые высоты. Следуя этому правилу, разложим потенциал силы тяжести в точке A физической поверхности Земли вдоль линии отвеса γ в ряд Тейлора

$$W_B = W_A + \left(\frac{dW}{dz} \right)_A z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 W}{dz^2} \right)_A z^2 + \dots, \quad (1)$$

где z — расстояние от точки A до текущей точки B (см. рис.).

Принимая за положительное направление направление вниз, имеем

$$W_B = W_A + g_A z + \frac{1}{2} \frac{dg}{dn} z^2. \quad (2)$$

В (2) мы не только оборвали ряд, но и считаем $\frac{dg}{dn}$ везде постоянным. Теперь (2) следует рассматривать не как ряд, а как формулу, задающую некоторое вспомогательное фиктивное гравитационное поле в некоторой области внутри физической поверхности Земли и обладающее тем свойством, что на внешней границе S потенциал его и сила тяжести принимают значения, равные потенциалу и силе тяжести реального внешнего гравитационного поля.

После дифференцирования (2) по z определяем силу тяжести в текущей точке B этого поля

$$g_B = g_A + \frac{dg}{dn} z.$$

Ясно, что $\frac{dg}{dn}$ — вертикальный градиент силы тяжести не в реальном, а во вспомогательном гравитационном поле.

Полагая, что $W_B = W_0$, где W_0 — потенциал силы тяжести Земли на уровне моря, и, опуская индексы, получаем

$$W_0 - W = gH + \frac{1}{2} \frac{dg}{dn} H^2, \quad (3)$$

$$g_0 = g + \frac{dg}{dn} H, \quad (4)$$

где g_0 — сила тяжести на поверхности S_0 , которую условно назовем геоидом (можно назвать сопутствующим геоидом); H — высота точки над S_0 .

В [2] на основе приведенного выше выражения (3) получена для этого класса систем высот такая дифференциальная формула:

$$dH = dh - \frac{1}{g} \frac{dg}{ds} H ds, \quad (5)$$

где dh — нивелирное превышение; ds — горизонтальное проложение между нивелирными рейками (в поправочном члене без потери в точности H можно заменить на h — измеренную высоту).

В [2] выведена также формула для составляющей угла между линией отвеса в точке A и нормалью к геоиду

$$\epsilon = \frac{dh - dH}{ds} = \frac{h}{g} \frac{dg}{ds}. \quad (6)$$

В приведенных выше формулах значение $\frac{dg}{ds}$ следует определять не

путем измерения (в этом отношении в цитированной работе необходимы

исправления с учетом некоторых замечаний В. В. Бровара [1]), а его надо при постоянном $\frac{dg}{dn}$ вычислять по формуле

$$dg = \frac{dg}{ds} ds - \frac{dg}{dn} dh,$$

где dg известно из измерений.

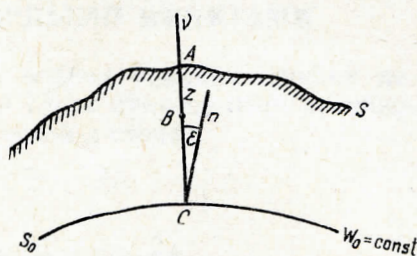
Из изложенного ясно, что каждому значению $\frac{dg}{dn}$ соответствует своя система высот и сопутствующий ей геоид.

При определении геоида методом Стокса используют редукции силы тяжести в свободном воздухе, где полагают $\frac{dg}{dn} = 0,308$ мгал/м.

Однако, как показано в данной статье, при этом следует вводить соответствующую систему высот. Можно ставить и следующую задачу: определить такое значение вертикального градиента силы тяжести, при котором система высот ближе всего подходила бы к измеренным высотам. Такую задачу решала Р. Р. Илькив. Были выполнены экспериментальные работы с целью получения значений геопотенциала во многих точках со значительными перепадами высот. В формулу (3), в которой в левой части геопотенциал, подставляли измеренные высоты

и таким путем находили значения $\frac{dg}{dn}$. Оказалось, что они близки к тому значению, которое принимают при вычислении редукций Буге, а именно — около 0,200 мгал/м.

Вообще говоря, какое бы значение мы ни брали для $\frac{dg}{dn}$ (конечно, в разумных пределах), можно определить фигуру и размер физической поверхности Земли с одинаковой точностью. Что касается



Схематическое изображение физической поверхности Земли и геоида.

внешнего гравитационного поля, то его следует определять по геопотенциалу и силе тяжести на уже известной физической поверхности Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Бровар. Об аналитическом продолжении при помощи ряда Тейлора. «Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка», 1968, № 6.
2. Н. К. Мигаль. Несколько слов об основных проблемах теории фигуры Земли. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1965.

Работа поступила
10 декабря 1970 г.
