

Р. М. ТАРТАЧИНСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ И СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В СЕТЯХ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Выполненные экспериментальные исследования [3, 5, 7] позволили выявить ряд особенностей в характере воздействия боковой рефракции на угловые измерения в этих районах. Однако как бы хорошо ни был задуман и выполнен исследовательский эксперимент, его результаты будут отражать только те явления, которые присущи данному месту, времени, погоде, условиям работы и наблюдателю.

В связи с этим целесообразно и важно выяснить характер и величину боковой рефракции на производственном материале по невязкам треугольников, содержащим истинные ошибки измерений.

Несомненным является наличие систематических ошибок в сетях триангуляции. На это указывалось в работах [2, 6, 8] и других. Поскольку производственные материалы, как и любые опытные данные, могут быть связаны не только со систематическими, но и со случайными ошибками, а в некоторых случаях и с постоянными ошибками, то вопрос о характере и величине боковой рефракции необходимо решать комплексно, с учетом других источников ошибок.

Комплексное исследование источников случайных и систематических ошибок в сетях триангуляции дает возможность выяснить, в какой степени производственные наблюдения обременены ошибками из-за неучета их характера и источника происхождения. Для выяснения этого нами была выполнена специальная обработка результатов угловых измерений в сплошной сети триангуляции II класса, которая расположена в равнинной степной местности с отметками до — 27,5 м. В южной и западной частях эта местность холмистая. Климат в этом районе сухой, континентальный. Среднее количество осадков 100—350 мм в год. Продолжительность вегетационного периода (со средней температурой выше +5°) до 200—230 дней.

Угловые измерения на пунктах сети производили теодолитами ОТ-02 в соответствии с требованиями действующей инструкции в течение полевых сезонов 1962—1964 гг. В обработку брали результаты измерений горизонтальных углов на 287 пунктах сети.

Обработка результатов измерений заключалась в том, что все количество приемов, выполненных в каждую видимость на данном пункте, распределялось на пять равных частей (групп), соответствующих пяти интервалам периода видимости. Отметим, что в принципе все число приемов за каждую видимость можно делить не на 5 частей, а на 3, 4 или 7, 8, 9 и т. д. При делении интервала видимости на 3, 4 части, как это будет следовать из дальнейшего, мы получили бы характеристики ошибок только для концов и середины периодов видимости и не смогли бы исследовать характер изменения ошибок в интервале от начала (конца) периода видимости до ее середины. При делении интервала видимости на 7, 8, 9 и более частей характер изменения ошибок в течение периода видимости был бы выражен более

четко, но в этом случае значительно возрастает объем вычислительных работ при получении менее достоверных характеристик ошибок. Поскольку при измерении углов в триангуляции II класса с весом 30 при 5—6 направлениях делают 6—5 приемов, то в связи с этим при делении периода видимости на 7 и более интервалов нельзя получить непосредственно измеренные углы в каждом интервале. Из сказанного вытекает, что деление программы на 5—6 частей является наиболее рациональным.

Результаты наблюдений, выполненных в утренний период, разносили в интервалы в обратном порядке, то есть значение угла утреннего периода в первом интервале записывали в пятый интервал вечернего периода, второй утренний — в четвертый вечерний интервал периода и т. д. В каждом интервале видимости выполняли уравнивание углов на станции.

По вычисленным пяти значениям одних и тех же углов были составлены невязки одних и тех же треугольников. В невязки треугольников вводились поправки за центрировки, редукции и сферический избыток. Таким образом, в каждом треугольнике было найдено 5 значений невязок, соответствующих пяти интервалам видимости. Обработка данных производилась для 424 треугольников; 49 треугольников в обработку не взяты из-за невозможности получить углы во всех пяти интервалах видимости. Из-за громоздкости результаты этих вычислений здесь не приводятся.

Поскольку наблюдения углов на каждом пункте в вечернюю видимость начинались при нормальном распределении температуры, продолжались при изотермии и заканчивались при инверсии, то это должно повлиять на величину и знаки невязок треугольников в различных интервалах видимости.

Если вычисленные невязки треугольников считать некоторыми сечениями случайной функции $\varphi(t)$, заданной в небольшом интервале t_1, t_5 , то, согласно [1], по полученным невязкам может быть составлена корреляционная матрица

$$\|K_{i,j}\| = \begin{vmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & K_{1,5} \\ & K_{2,2} & K_{2,3} & K_{2,4} & K_{2,5} \\ & & K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,5} \\ & & & K_{4,4} & K_{4,5} \\ & & & & K_{5,5} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Численные значения корреляционной матрицы (1) представлены в табл. 1.

По главной диагонали матрицы расположены квадраты оценок дисперсий $D_\varphi(t)$, которые позволяют найти как средние квадратические отношения $\sigma_\varphi(t)$, так и средние квадратические ошибки измерения углов μ ,

$$\sigma_\varphi = \pm \sqrt{D_\varphi}, \quad (2)$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{D_\varphi}{3}}. \quad (3)$$

Результаты вычислений μ для 1/5 программы и предвычисления ее значений для 2/5, 3/5, 4/5 и полной программы приведены в табл. 2.

Данные табл. 2 свидетельствуют о том, что минимальные значения μ имеют место на середине периода видимости и увеличиваются, как и следовало ожидать, к ее краям. Эти данные показывают также характер уменьшения μ с увеличением числа приемов измерений.

Результаты, приведенные в табл. 2, позволяют говорить о возможном сокращении числа приемов измерения углов, если эта сокращенная программа будет выполняться при наиболее благоприятных внешних условиях.

Для детального исследования характера и величины ошибок в невязках треугольников в зависимости от интервала видимости можно

Таблица 1

Значения корреляционной матрицы невязок треугольников

Интервалы	1	2	3	4	5
1	5,718	1,911	1,302	1,520	1,591
2		5,511	1,274	1,266	1,015
3			4,924	1,400	1,370
4				5,599	1,318
5					5,469

Таблица 2

Зависимость μ от интервала видимости и числа приемов

Интервалы (числитель) и программа (знаменатель)	1	2	3	4	5
1/5	$\pm 1,38''$	$\pm 1,36''$	$1,28''$	$\pm 1,37''$	$\pm 1,35''$
2/5	$0,97''$	$0,93''$	$0,94''$	$\pm 0,96''$	
3/5		$0,77$	$0,77$	$0,77$	
4/5			$0,67$	$0,67''$	
			$0,60$		

принять, что каждая невязка $W_{i,k}$ состоит из случайной части $\alpha_{i,k}$, систематической части $\beta_i t_k$, где t — время, отсчитываемое от середины периода видимости, и постоянной части γ_i .

Таким образом,

$$w_{i,k} = \alpha_{i,k} + \beta_i t_k + \gamma_i, \quad w_{i,l} = \alpha_{i,l} + \beta_i t_l + \gamma_i, \quad (4)$$

где i — номер случайной величины; k, l — интервалы периода видимости.

В соответствии с (4) корреляционные моменты (1) можно представить в виде

$$K_{k,l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_{i,k} \cdot w_{i,l}. \quad (5)$$

Подставляя в (5) значения (4) и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \cdot \alpha_{i,l} &= 0, & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \cdot \beta_i t_k &= 0, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \cdot \gamma_i &= 0, & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i t_k \cdot \gamma_i &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

для членов корреляционной матрицы, расположенных по главной диагонали, получаем

$$K_{ll} = \alpha^2 + \beta^2 t_l \cdot t_l + \gamma^2 \quad (k = l = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (7)$$

Остальные члены корреляционной матрицы записываем в виде

$$K_{k,l} = \beta^2 t_k \cdot t_l + \gamma^2. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) дают возможность составить 15 уравнений ошибок для определения неизвестных α , β и γ .

Так как t_3 — середина периода видимости, взятого за единицу, то

$$t_1 = -0,5; \quad t_2 = -0,25; \quad t_3 = 0; \quad t_4 = +0,25; \quad t_5 = +0,5. \quad (9)$$

На основании табл. 1, уравнений (7), (8) и с учетом (9) можем получить следующие уравнения ошибок:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 0,250 \beta^2 + \gamma^2 - 5,718 &= v_1, & -0,250 \beta^2 + \gamma^2 - 1,591 &= v_9, \\ \alpha^2 + 0,062 \beta^2 + \gamma^2 - 5,511 &= v_2, & 0 + \gamma^2 - 1,274 &= v_{10}, \\ \alpha^2 + 0 + \gamma^2 - 4,924 &= v_3, & -0,062 \beta^2 + \gamma^2 - 1,262 &= v_{11}, \\ \alpha^2 + 0,062 \beta^2 + \gamma^2 - 5,599 &= v_4, & -0,125 \beta^2 + \gamma^2 - 1,015 &= v_{12}, \\ \alpha^2 + 0,250 \beta^2 + \gamma^2 - 5,469 &= v_5, & 0 + \gamma^2 - 1,400 &= v_{13}, \\ + 0,125 \beta^2 + \gamma^2 - 1,911 &= v_6, & 0 + \gamma^2 - 1,370 &= v_{14}, \\ 0 + \gamma^2 - 1,302 &= v_7, & + 0,125 \beta^2 + \gamma^2 - 1,318 &= v_{15}. \end{aligned} \quad (10)$$

По уравнениям (10) составлены нормальные уравнения и выполнено их решение способом Гаусса с одновременным определением весовых коэффициентов. Заметим, что решение указанных уравнений может быть выполнено и другими способами. В результате решения нормальных уравнений и весовой функции найдены значения неизвестных и выполнена оценка точности их определения.

$$\alpha = \pm 1,98'' \pm 0,03''; \quad \beta = \pm 0,89 \pm 0,35; \quad \gamma = \pm 1,19 \pm 0,03. \quad (11)$$

По случайной части α находим среднюю квадратическую ошибку измерения угла для 1/5 и полной программы

$$m_c = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{3}} = \pm 1,14''; \quad m_{c. пр} = \pm \frac{1,14''}{\sqrt{5}} = \pm 0,51''. \quad (12)$$

Полученное значение $m_{c. пр}$ показывает, что если исключить из результатов угловых измерений влияние ошибок внешних условий и других постоянных ошибок, то точность угловых измерений значительно повышается.

Вычисленное значение углового коэффициента β позволяет предвычислить ошибку за действие боковой рефракции в треугольнике на краю периода видимости

$$m_r = \beta t_1 = \pm 0,89 \times 0,5 = \pm 0,44'' \pm 0,18''. \quad (13)$$

С учетом того, что ошибка за действие боковой рефракции в течение видимости меняет знак, невязки треугольников могут быть обременены предельными значениями этой ошибки, равными примерно 2''. При правильно составленной программе измерений углов на пунктах ошибка рефракции может быть в значительной мере ослаблена. Постоянная часть невязок треугольников γ представляет собой прежде всего ту часть угловых погрешностей, которые обусловлены ошибками определения элементов приведения. Она не исключается из невязок треугольников методикой угловых измерений. В расчете на один угол получаем

$$m_\gamma = \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{3}} = \pm 0,69''. \quad (14)$$

Это довольно большая величина ошибки. Здесь следует отметить, что значительные погрешности в углах из-за неточного определения элементов приведения могут быть по той причине, что центрировки, редукции и угловые измерения выполняются в разное время. Температурные воздействия, особенно на высокие сигналы, могут значительно исказить линейные элементы приведения. Тем не менее трудно допустить, чтобы эти погрешности в углах превышали $0,3-0,4''$. Очевидно, здесь имеют место и другие источники ошибок. На основании изложенного выше можно сделать следующие выводы.

1. Угловые измерения в триангуляции II класса в равнинной и всхолмленной местности обременены такими величинами средних квадратических ошибок:

- а) случайные ошибки измерений углов $+0,51''$;
- б) ошибки от действия боковой рефракции $\pm 0,62''$;
- в) ошибки элементов приведения и прочие постоянные погрешности $\pm 0,69''$.

Таким образом, при современной методике угловых измерений и применяемых инструментах основными источниками ошибок являются погрешности боковой рефракции и элементов приведения. Следовательно, для повышения точности угловых измерений в триангуляционных сетях II класса необходимо прежде всего разработать методы минимализации этих погрешностей. Что касается минимализации ошибок боковой рефракции, то угловые измерения на пунктах триангуляции следует выполнять по новым программам с учетом рекомендаций [4, 9, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Венцель Е. С. Теория вероятности. М., 1969.
2. Зимовнов В. Н. Способ наименьших квадратов в приложении к измерениям, сопровождающимся постоянными погрешностями. Геодезиздат, М., 1960.
3. Островский А. Л., Тартачинский Р. М. Опыт применения программы угловых измерений, симметричной относительно моментов изотермии воздушных масс, в южном степном районе. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1965.
4. Островский А. Л. К вопросу программы угловых измерений при световой радиодальномерной полигонометрии. В сб. «Инженерная геодезия», вып. 1. «Будівельник», Киев, 1965.
5. Островский А. Л., Сидорик Р. С. Определение промежутков времени с минимальным действием земной рефракции по радиационному балансу. В сб. «Инженерная геодезия», вып. 3. «Будівельник», Киев, 1966.
6. Пеллинен Л. П. Причины появления невязок треугольников с одним знаком. «Геодезия и картография», 1956, № 5.
7. Пеллинен Л. П. Исследования по угловым измерениям в триангуляции. Труды ЦНИИГАиК, вып. 114. Геодезиздат, М., 1957.
8. Смирнов Н. В., Белугин Д. А. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. «Недра», М., 1969.
9. Хижак Л. С. Связь между колебаниями изображений и ошибками углов рефракционного происхождения. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 1. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1964.
10. Яковлев Н. В. К теории и практике учета суточного хода рефракции при угловых измерениях и азимутальных определениях в геодезических сетях. «Геодезия и картография», 1969, № 8.

Работа поступила
29 октября 1970 г.