

Л. К. ВОЙСЛАВСКИЙ

ЭНТРОПИЯ РЕЛЬЕФА, РАССМАТРИВАЕМОГО КАК СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ ВЫСОТ

Рельеф представляет собой непрерывную совокупность точек, высоты которых распределены в интервале от Z_0 до Z_n . Если эту совокупность рассматривать в первом приближении как случайное поле высот, то есть не принимать во внимание существующие морфологические связи между отдельными точками, то энтропия рельефа может быть записана так [4]:

$$H(Z) = - \int_{Z_0}^{Z_n} f(Z) \log f(Z) dZ - \log \Delta z, \quad (1)$$

где $f(Z)$ — дифференциальная функция распределения высот; символ \log обозначает двоичный логарифм; Δz — принятый интервал квантования высот.

Некоторое представление о характере функций, которые, в конечном счете, определяют энтропию рельефа, могут дать графики плотности вероятности, полученные по опытным данным для 30 различных участков местности (рис. 1). Площадь этих участков составляет 0,25—29 км². Рельеф их типичен для равнинной местности: пологие склоны, долины и балки, поймы рек, водораздельные плато и т. д. Расстояние между отдельными участками колеблется от нескольких километров до нескольких сотен километров, поэтому их территориальное размещение можно считать случайным. То же самое следует сказать об очертании границ и геоморфологическом строении рельефа.

Анализ кривых, представленных на рис. 1, позволил выделить несколько типов рельефа с более или менее однородным характером распределения:

I. Участки, расположенные на ровных или слегка выпуклых склонах. Изрезанность склонов незначительная (7 участков, рис. 1, а).

II. Долины и балки с ровными или слегка выпуклыми склонами (3 участка, рис. 1, б).

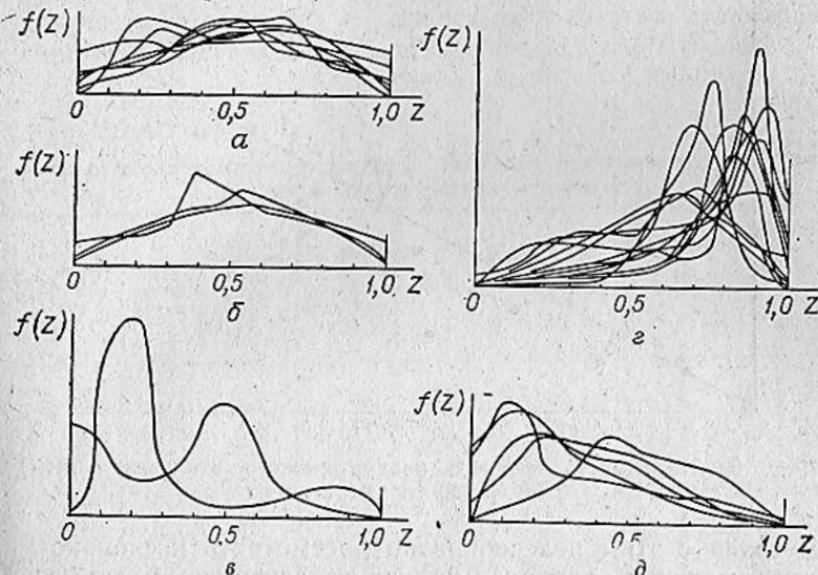


Рис. 1. Графики плотности вероятности нормированных высот для различных типов рельефа: распределение высот равномерное или трапецидальное (а), треугольное, усеченное, почти симметричное (б), двумодальное, как правило, асимметричное (в), одномодальное с отрицательной асимметрией (г), одномодальное с положительной асимметрией (д).

III. Равнина с подовыми понижениями (2 участка, рис. 1, в).

IV. 1. Почти горизонтальная равнина с трудноулавливаемым микрорельефом (2 участка).

2. Участки в пойме реки или на речной террасе, включающие часть коренного берега (3 участка).

V. 1. Слегка всхолмленная равнина с широкими водоразделами и хорошо развитой сетью балок (1 участок, рис. 1, г).

2. Участки на водораздельных плато, захватывающие часть склона и верховья лощин (12 участков).

Как видим, распределения высот занимают промежуточное положение между двумя пределами, которыми являются равномерное распределение с одной стороны и нормальное с другой. Поэтому наиболее подходящим математическим аппаратом для их описания будут, по-видимому, распределения с функциями $a(t)$ и $b(t)$, полученные Н. А. Бородачевым [1]. Учитывая весь сложный характер распределения высот, обусловленный мно-

гообразием рельефообразующих факторов, определение энтропии рельефа по формуле (1) через аналитическое выражение функции $f(Z)$ на данном этапе не представляется возможным. Вычисление энтропии путем табличного задания функции $f(Z)$ также малоэффективно, так как, во-первых, требует большого объема вычислений, во-вторых, не может быть применено для предварительных расчетов.

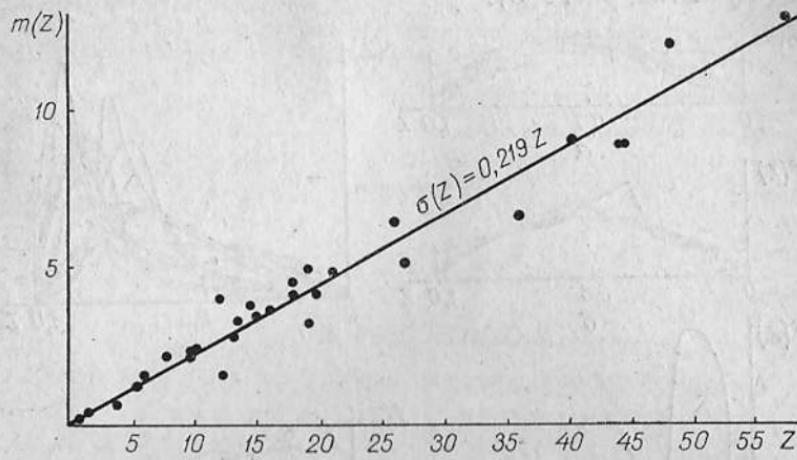


Рис. 2. Зависимость среднего квадратического отклонения $m(z)$ от разности высот z .

В связи с этим целесообразно рассмотреть несколько упрощенных моделей, аппроксимирующих энтропию рельефа, рассматриваемого как случайное поле высот.

Рельеф — множество точек с заданными наименьшей Z_0 и наибольшей Z_n высотами. Распределение высот любого, как угодно большого, участка местности — усеченное распределение с областью изменения случайной величины $Z_0 \leq Z_i \leq Z_n$. Максимальная энтропия в этом случае соответствует равномерному распределению и может быть записана в виде [4]

$$H_0(Z) = \log\left(\frac{z}{\Delta z}\right), \quad (2)$$

где $z = Z_n - Z_0$.

Сравнивая (см. таблицу) величины $H_0(Z)$ с энтропией, вычисленной по опытным данным

$$H'(Z) = - \sum_1^n p_i \log p_i, \quad (3)$$

где p_i — частоты (приближенные вероятности) попадания высот точек в достаточно узкие интервалы $(Z_0, Z_1), (Z_1, Z_2), \dots, (Z_{n-1}, Z_n)$, мы видим, что выражение (2) даст значение энтропии, завышенное в среднем на 0,4 бит.

Рельеф — множество точек с заданным средним квадратическим отклонением высот $\sigma(Z)$. Действительно, как видно из рис. 2, для обследованных участков существует тесная зависимость между разностями $z = Z_n - Z_0$ и несмешенными оценками среднего квадратического отклонения высот

$$m(Z) = \sqrt{\sum_1^n p_i Z_i^2 - \left(\sum_1^n p_i Z_i\right)^2}.$$

Коэффициент корреляции z и $m(Z)$ равен 0,98. Следовательно, между стандартом $\sigma(Z)$ и разностью z должна существовать функциональная зависимость вида

$$\sigma(Z) = qz, \quad (4)$$

так как, если $z=0$, то и $\sigma(Z)=0$.

Основные характеристики рельефа и численные значения энтропии высот для различных участков местности

Номер участка	Площадь участка, E км 2	Количество точек	Наибольшая разность высот $z = Z_n - Z_0$	Ср. квадратическое отклонение $m(Z)$	$\frac{m(Z)}{z}$	Энтропия (бит)			
						$H'(Z)$	$H_0(Z)$	$H_1(Z)$	$H_2(Z)$
25	9,0	231	19,0	4,98	0,262	3,20	3,25	3,00	2,71
13	2,4	1440	8,0	2,16	0,270	3,94	4,00	3,75	3,58
6	0,3	185	18,0	4,46	0,248	4,07	4,17	3,92	3,94
21	1,7	186	48,2	12,05	0,250	5,47	5,59	5,34	5,20
3	0,5	350	21,0	4,87	0,232	4,23	4,39	4,14	4,11
9	1,7	1120	18,0	4,07	0,226	4,00	4,17	3,92	3,78
8	0,45	277	16,0	3,55	0,222	3,80	4,00	3,75	3,73
29	4,3	115	15,0	3,39	0,226	3,71	3,91	3,66	3,43
22	1,0	615	13,5	3,31	0,245	3,55	3,75	3,50	3,41
19	0,25	624	9,5	2,12	0,223	3,03	3,25	3,00	3,04
17	1,0	767	12,8	3,56	0,278	3,43	3,68	3,43	3,34
30	9,0	243	10,0	2,18	0,218	3,06	3,32	3,07	2,77
12	1,0	111	10,0	2,16	0,216	3,05	3,32	3,07	2,98
4	0,5	341	1,5	0,31	0,205	0,30	0,58	0,33	0,30
5	0,4	232	44,0	8,80	0,200	5,17	5,46	5,21	5,20
26	0,6	361	14,4	3,68	0,256	3,53	3,85	3,60	3,55
24	13,0	1303	58,5	12,81	0,219	5,55	5,87	5,62	5,29
2	0,6	402	1,2	0,24	0,198	-0,10	0,26	0,01	0,04
27	1,7	178	19,5	4,06	0,208	3,90	4,28	4,03	3,89
7	23,0	587	13,0	2,78	0,214	3,25	3,70	3,45	3,07
28	15,0	382	5,5	1,17	0,212	2,00	2,46	2,21	1,87
1	29,0	741	40,0	8,96	0,224	4,80	5,32	5,07	4,67
20	0,9	636	27,1	5,09	0,188	4,06	4,76	4,51	4,43
10	6,5	203	26,0	6,42	0,247	3,99	4,70	4,45	4,18
16	0,6	402	3,8	0,59	0,158	1,05	1,91	1,66	1,62
14	5,0	132	44,0	8,80	0,200	4,59	5,46	5,21	4,97
15	11,0	272	6,0	1,51	0,251	1,70	2,58	2,35	2,02
11	13,0	370	19,0	3,17	0,167	3,30	4,25	4,00	3,67
31	12,5	347	12,2	1,55	0,127	2,59	3,61	3,36	3,03
18	7,8	768	36,0	6,62	0,184	4,10	5,17	4,92	4,64

173,7 13921

Примечание: Значения $H'(Z)$, $H_0(Z)$, $H_1(Z)$, $H_2(Z)$ вычислены при $\Delta z = 1$ м.

По опытным данным, приведенным в таблице, получено среднее значение

$$\bar{q} = 0,219 \pm 0,006. \quad (a)$$

Отметим попутно один любопытный факт. В работе И. П. Шарапова [3] приведены данные, характеризующие распределение высот нескольких типов рельефа по 9 участкам, расположенным в различных физико-географических зонах СССР. Каждый из 9 участков имеет площадь 1600 км². В результате обработки материалов И. П. Шарапова мы получили

$$q_i = \frac{m_i Z}{z_i} = 0,134 - 0,326,$$

а среднее значение коэффициента

$$\bar{q} = 0,22 \pm 0,02. \quad (b)$$

Вряд ли такое хорошее совпадение величин (a) и (b) является случайным. Скорее всего в этом проявляется одна из закономерностей распределения высот.

Средние значения \bar{q} очень близки соответствующему коэффициенту для треугольного распределения Симпсона

$$q = \frac{1}{2\sqrt{6}} = 0,204.$$

Отметим также общность распределения высот (рис. 1), проявляющуюся в том, что все они являются переходными, промежуточными состояниями между двумя пределами — равномерным и нормальным распределениями.

Учитывая эти соображения, на основании (4) можно принять

$$\sigma(Z) = \frac{z}{2\sqrt{6}}. \quad (5)$$

Для совокупности случайных величин Z_i с фиксированным средним квадратическим отклонением $\sigma(Z)$ максимальное значение энтропии [4]

$$H(Z) = \log \left(\frac{\sqrt{2\pi e} \sigma(Z)}{\Delta z} \right).$$

Подставляя вместо $\sigma(Z)$ его значение из (5), получим

$$H_1(Z) = \log \left(\sqrt{\frac{\pi e}{12}} \frac{z}{\Delta z} \right) = \log (0,844 \frac{z}{\Delta z}). \quad (6)$$

Обратимся к данным, приведенным в таблице. Для 10 участков (их рельеф мы отнесли к I и II типу) величина энтропии $H_1(Z)$ меньше $H'(Z)$ в среднем на 0,1 бит, а для остальных 20 $H_1(Z)$ больше $H'(Z)$ в среднем на 0,3 бит.

Модель энтропии рельефа, учитывающая площадь участка. Существенный недостаток рассмотренных выше моделей состоит в том, что они не учитывают пространственную расчлененность рельефа. Между тем на любой, даже самой сложной, поверхности всегда можно выделить малый участок, для которого распределение высот будет как угодно близким к равномерному. По мере увеличения площади участка условия рельефообразования становятся более разнообразными, все сильнее проявляется естественное многообразие рельефа. Соответственно изменяется распределение высот. Такова, по-видимому, общая тенденция. Следовательно, энтропия рельефа также в какой-то мере должна зависеть от площади участка. Для проверки данного предположения по имеющимся опытным данным исследована статистическая связь величин

$$x = \log F; \quad y = H'(Z) - \log z. \quad (7)$$

Коэффициент корреляции $r_{xy} = -0,44$ оказался больше критического $r_q = -0,4226$ при уровне значимости $\gamma = 0,99$ и объеме выборки $n = 30$ [2]. Следовательно, энтропия высот некоторым образом зависит от площади участка.

Уравнение регрессии величин (7) имеет вид

$$y - y_{cp} = r_{yx} \frac{m_y}{m_x} (x - x_{cp}), \quad (8)$$

где m_x и m_y — средние квадратические отклонения величин x и y .

Если обозначить в (8)

$$t = -r_{yx} \frac{m_y}{m_x}; \quad \log S = y_{cp} + tx_{cp}$$

и принять во внимание (7), получим выражение энтропии, учитывающее площадь участка

$$H_2(Z) = \log \left(\frac{S}{F^t \Delta z} \right), \quad (9)$$

где S и t — параметры, зависящие от геоморфологических характеристик рельефа, F — площадь участка, км^2 .

Заметим, что каждому типу рельефа, более того, каждому участку местности будут соответствовать свои значения параметров S и t . Так как при достаточно малом Δz

$$0 \ll H_2(Z) \leq H_0(Z),$$

то

$$0 \ll S \leq 1; \quad 1 \gg t \geq 0, \quad (10)$$

причем равенство в (10) имеет место только в случае равномерного распределения высот.

Средние значения параметров, полученные на основании опытных данных по способу наименьших квадратов, оказались

равными: $S = 0,79 \pm 0,01$; $t = 0,06 \pm 0,01$, а соответствующие им величины $H_2(Z)$ приведены в таблице.

Из обследованных нами участков в 13 случаях $H_2(Z) < H'(Z)$ в среднем на 0,2 бит, в 9 случаях $H_2(Z) \approx H'(Z)$ и в 8 случаях $H_2(Z) > H'(Z)$ в среднем на 0,4 бит. Если по всем участкам найти разности

$$\delta_0 = H_0(Z) - H'(Z); \quad \delta_1 = H_1(Z) - H'(Z); \quad \delta_2 = H_2(Z) - H'(Z),$$

то их средние квадратические отклонения будут соответственно равны

$$m(\delta_0) = 0,52; \quad m(\delta_1) = 0,36; \quad m(\delta_2) = 0,28.$$

Таким образом, из трех рассмотренных моделей энтропии рельефа наиболее близкой к действительности оказывается модель, выражаемая формулой (9), поскольку она более полно отражает влияние пространственной неравномерности рельефа и хорошо согласуется с опытными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородачев Н. А. [и др.]. Точность производства в машиностроении и приборостроении. М., 1973.
2. Оуэн Д. Б. Сборник статистических таблиц. М., 1973.
3. Шарапов И. П. Функции распределения высоты рельефа. — В кн.: Рельеф Земли и математика. М., 1967.
4. Шеннон К. Э. Работы по теории информации и кибернетике. М., 1963.

Работа поступила в редакцию 2 февраля 1976 г. Рекомендована кафедрой геодезии Харьковского института инженеров коммунального строительства.