РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 14

АЭРОФОТОСЪЕМКА

УДК 528.735.2

Х. В. БУРШТЫНСКАЯ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОВАРИАЦИОННЫХ МАТРИЦ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ФОТОТРИАНГУЛИРОВАНИЯ

Для исключения деформации пространственной фототриангуляционной сети в практике используются полиномы различных степеней. Коэффициенты этих полиномов обычно определяются по расхождениям фотограмметрических и геодезических координат опорных точек. По разностям ошибок координат η_i точек свободного фототриангуляционного ряда и уравненных значений поправок η_i^0

$$v_i=\eta_i-\eta_i^0 \; (i=1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

производится оценка точности, заключающаяся в нахождении средней квадратической ошибки данного фототриангуляционного ряда [1].

$$m^2=\frac{[vv]}{n}.$$

Для более полной оценки точности в статье предлагается после исключения деформации по полиному k-той степени определять остаточные дисперсии координат в каждой точке пространственной фототриангуляции. При решении этой задачи используется ковариационная матрица.

Пространственная фототриангуляционная сеть рассматривается в виде вытянутого хода, оценка точности найденных координат выполняется после геодезического ориентирования.

Если пространственная сеть строится таким образом, что последующее звено ориентируется по ранее ориентированному предыдущему звену, то ошибки фотограмметрической сети, как известно, накапливаются по закону двойного суммирования

$$\begin{aligned} \eta_1&=\varepsilon_1, \\ \eta_2&=2\varepsilon_1+\varepsilon_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n&=n\varepsilon_1+(n-1)\,\varepsilon_2+\ \ldots\ +\varepsilon_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Определим ковариационную матрицу величины η_i. Элементы ковариационной матрицы.

$$\left\|\sigma_{\eta_i\eta_j}\right\| = \left\| \begin{matrix} \sigma^2_{\eta_1} & \sigma_{\eta_1\eta_2} & \ldots & \sigma_{\eta_1\eta_n} \\ \sigma_{\eta_2\eta_1} & \sigma^2_{\eta_2} & \ldots & \sigma_{\eta_2\eta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{\eta_n\eta_1} & \sigma_{\eta_n\eta_2} & \ldots & \sigma^2_{\eta_n} \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

находятся по общему правилу нахождения дисперсий и ковариаций линейных функций случайных величин [2].

Считая ε_p статистически независимыми с дисперсиями $\sigma^2_{\varepsilon_p}$ ($p=1, 2 \ldots n$), ковариационную матрицу получаем по формуле

$$\left\|\sigma_{\eta_i\eta_j}\right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \sigma^2_{\varepsilon_p} C_{pi} C_{pj} \right\|, \tag{3}$$

где C_p — коэффициенты уравнений (1).

Представим величину η_i как суммарную ошибку, состоящую из систематической части, которую можно выразить с помощью полинома k-той степени, и случайной ошибки Δ_i

$$\eta_i = (a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \ldots + a_k i^k) + \Delta_i. \tag{4}$$

Для точки i имеем r выражений (4)

$$\begin{aligned}
\eta_{i1} &= (a_{01} + a_{11} i + a_{21} i^2 + \ldots + a_{k1} i^k) + \Delta_{i1},\\
\eta_{i2} &= (a_{02} + a_{12} i + a_{22} i^2 + \ldots + a_{k2} i^k) + \Delta_{i2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_{ir} &= (a_{0r} + a_{1r} i + a_{2r} i^2 + \ldots + a_{kr} i^k) + \Delta_{ir}.
\end{aligned}$$

Возведем приведенные уравнения в квадрат, затем сложим и разделим на r. В результате получаем

$$\frac{[\eta_i^2]}{r} = \frac{[a_0^2]}{r} + \frac{[a_1^2]}{r} i^2 + \frac{[a_2^2]}{r} i^4 + \ldots + \frac{[a_k^2]}{r} i^{2k} + 2\frac{[a_0 a_1]}{r} i + 2\frac{[a_0 a_2]}{r} i^2 +$$
$$\ldots + 2\frac{[a_0 a_k]}{r} i^k + 2\frac{[a_1 a_2]}{r} i^3 + \ldots + 2\frac{[a_1 a_k]}{r} i^{k+1} + \ldots +$$
$$+ 2\frac{[a_2 a_k]}{r} i^{k+2} + \ldots + \frac{[\Delta_i^2]}{r}$$

или при $r \to \infty$

$$\sigma^2_{\eta_i} = \sigma^2_{a_0} + \sigma^2_{a_1} i^2 + \sigma^2_{a_2} i^4 + \ldots + \sigma^2_{a_k} i^{2k} + 2\sigma_{a_0 a_1} i + 2\sigma_{a_0 a_2} i^2 + \ldots +$$
$$+ 2\sigma_{a_0 a_k} i^k + 2\sigma_{a_1 a_2} i^3 + \ldots + 2\sigma_{a_1 a_k} i^{k+1} + \ldots + 2\sigma_{a_2 a_k} i^{k+2} + \ldots + \sigma^2_{\Delta_i}. \tag{5}$$

Здесь $\sigma^2_{\eta_i}$ — дисперсия η_i; $\sigma^2_{a_0}, \sigma^2_{a_1}, \ldots, \sigma^2_{a_k}$ — дисперсии коэффициентов полинома; $\sigma^2_{\Delta_i}$ — дисперсия оставшейся случайной ошибки Δ_i, $\sigma_{a_0 a_1}, \sigma_{a_0 a_2}, \ldots \sigma_{a_{k-1} a_k}$ — ковариации.

$$\sigma_{a_0 a_1} = \operatorname{cov} a_0 a_1, \qquad \sigma_{a_0 a_2} = \operatorname{cov} a_0 a_2, \ldots, \sigma_{a_{k-1} a_k} = \operatorname{cov} a_{k-1} a_k.$$

Умножим η_i на η_j и выполним над ними аналогичные действия, то есть сложим и разделим на r

$$\sigma_{\eta_i \eta_j} = \sigma^2_{a_0} + \sigma^2_{a_1} ij + \sigma^2_{a_2} i^2 j^2 + \ldots + \sigma^2_{a_k} i^k j^k + \sigma_{a_0 a_1}(i+j) +$$
$$+ \sigma_{a_0 a_2}(i^2 + j^2) + \ldots + \sigma_{a_0 a_k}(i^k + j^k) + \sigma_{a_1 a_2}(i j^2 + j i^2) + \ldots +$$
$$+ \sigma_{a_1 a_k}(i j^k + j i^k) + \ldots + \sigma_{a_2 a_k}(i^2 j^k + j^2 i^k) + \ldots + \sigma_{\Delta_i \Delta_j}. \tag{6}$$

Для нахождения неизвестных $\sigma^2_{a_0}, \sigma^2_{a_1}, \ldots, \sigma^2_{a_k}, \sigma_{a_0 a_1}, \ldots, \sigma_{a_{k-1} a_k}$ предполагаются известными координаты опорных точек; пусть они составляют $m, n, \ldots p$. Тогда система уравнений погрешностей имеет вид

$$\sigma^2_{a_0} + \sigma^2_{a_1} m^2 + \sigma^2_{a_2} m^4 + \ldots + \sigma^2_{a_k} m^{2k} + 2\sigma_{a_0a_1} m + 2\sigma_{a_0a_2} m^2 + \ldots +$$
$$2\sigma_{a_0a_k} m^k + 2\sigma_{a_1a_2} m^3 + \ldots + 2\sigma_{a_1a_k} m^{k+1} + \ldots + 2\sigma_{a_2a_k} m^{k+2} \ldots - \sigma^2_{\eta_m} = \sigma^2_{\Delta m},$$
$$\sigma^2_{a_0} + \sigma^2_{a_1} n^2 + \sigma^2_{a_2} n^4 + \ldots + \sigma^2_{a_k} n^{2k} + 2\sigma_{a_0a_1} n + 2\sigma_{a_0a_2} n^2 + \ldots + 2\sigma_{a_0a_k} n^k +$$
$$+ 2\sigma_{a_1a_2} n^3 + \ldots + 2\sigma_{a_1a_k} n^{k+1} + \ldots + 2\sigma_{a_2a_k} n^{k+2} + \ldots - \sigma^2_{\eta_n} = \sigma^2_{\Delta_n},$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\sigma^2_{a_0} + \sigma^2_{a_1} p^2 + \sigma^2_{a_2} p^4 + \ldots + \sigma^2_{a_k} p^{2k} + 2\sigma_{a_0a_1} p + 2\sigma_{a_0a_2} p^2 + \ldots + 2\sigma_{a_0a_k} p^k +$$
$$+ 2\sigma_{a_1a_2} p^3 + \ldots + 2\sigma_{a_1a_k} p^{k+1} + \ldots + 2\sigma_{a_2a_k} p^{k+2} + \ldots - \sigma^2_{\eta_p} = \sigma^2_{\Delta_p},$$
$$+ \sigma^2_{a_1} mn + \sigma^2_{a_2} m^2n^2 + \ldots + \sigma^2_{a_k} m^kn^k + \sigma_{a_0a_1}(m+n) + \sigma_{a_0a_2}(m^2+n^2) + \ldots$$
$$+ \sigma_{a_0a_k}(m^k+n^k) + \sigma_{a_1a_2}(mn^2+nm^2) + \ldots + \sigma_{a_1a_k}(mn^k+nm^k) + \ldots +$$
$$+ \sigma_{a_2a_k}(m^2n^k+n^2m^k) + \ldots - \sigma_{\eta_m\eta_n} = \sigma_{\Delta_m\Delta_n},$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$
$$\sigma^2_{a_0} + \sigma^2_{a_1} mp + \sigma^2_{a_2} m^2p^2 + \ldots + \sigma^2_{a_k} m^kp^k + \sigma_{a_0a_1}(m+p) +$$
$$+ \sigma_{a_0a_2}(m^2+p^2) + \ldots + \sigma_{a_0a_k}(m^k+p^k) + \sigma_{a_1a_2}(mp^2+pm^2) + \ldots +$$
$$+ \sigma_{a_1a_k}(mp^k+pm^k) + \ldots + \sigma_{a_2a_k}(m^2p^k+p^2m^k) + \ldots - \sigma_{\eta_m\eta_p} = \sigma_{\Delta_m\Delta_p},$$
$$+ \sigma^2_{a_1} np + \sigma^2_{a_2} n^2p^2 + \ldots + \sigma^2_{a_k} n^kp^k + \sigma_{a_0a_1}(n+p) + \sigma_{a_0a_2}(n^2+p^2) + \ldots +$$
$$+ \sigma_{a_0a_k}(n^k+p^k) + \sigma_{a_1a_2}(np^2+pn^2) + \ldots + \sigma_{a_1a_k}(np^k+pn^k) + \ldots +$$
$$+ \sigma_{a_2a_k}(n^2p^k+p^2n^k) + \ldots - \sigma_{\eta_n\eta_p} = \sigma_{\Delta_n\Delta_p}.$$

Дисперсии и ковариации величин η_i, входящие в уравнения (7), яются свободными членами уравнений и выбираются из ковариа-онной матрицы (3).

Решая систему под условием $[vv] = \min$ ($v_1 = \sigma^2_{\Delta m}$, $v_2 = \sigma^2_{\Delta n}$, . . .), на-дим неизвестные σ_{a_0}, $\sigma^2_{a_1}, \ldots \sigma_{a_{k-1}a_k}$.

Если величины дисперсий и ковариаций коэффициентов полинома дставить в уравнение погрешностей для точки j, получим дисперсию я этой точки после устранения деформации по полиному k-той степени.

$$\sigma^2_{\Delta_j} = \sigma^2_{\eta_j} - (\sigma^2_{a_0} + \sigma^2_{a_1} j^2 + \sigma^2_{a_2} j^4 + \ldots + \sigma^2_{a_k} j^{2k} + 2\sigma_{a_0a_1} j + 2\sigma_{a_0a_2} j^2 + \ldots +$$
$$+ 2\sigma_{a_0a_k} j^k + 2\sigma_{a_1a_2} j^3 + \ldots + 2\sigma_{a_1a_k} j^{k+1} + \ldots + 2\sigma_{a_2a_k} j^{k+2} + \ldots). \quad (8)$$

Описанный выше метод был применен для предвычисления диспер-й координат точек после исключения деформации по полиному вто-й и третьей степени.

Ковариационная матрица, составленная в соответствии с (3), при-дена в таблице.

Дисперсия $\sigma^2_{\varepsilon_p}$ принималась равной 0,04; $n=15$.

Для устранения деформации по полиному второй степени выбраны опорные точки ($i=1$; 5; 10), а для устранения деформации по поли-му третьей степени — четыре точки ($i=1$; 5; 10; 15).

Остаточные дисперсии точек составили:

1) при уравнивании по полиному второй степени

№ точки	2	3	4	6	7	8	9
$\sigma^2_{\Delta i}$	0,03	0,08	0,07	0,15	0,32	0,44	0,38

Ковариационная матрица

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,04	0,08	0,12	0.16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40	0,44	0,48	0,52	0,56	0,60
	0.20	0,32	0,44	0.56	0,68	0.80	0,92	1,04	1,16	1,28	1,40	1.52	1,64	1,76
		0,56	0,80	1,04	1.28	1,52	1,76	2,00	2,21	2,48	2,72	2,96	3,20	3,44
			1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00	4,40	4,80	5,20	5,60
				2,20	2.80	3,40	4,00	4.60	5,20	5,80	6,40	7,00	7,60	8,20
					3,64	4,48	5,32	6,16	7,00	7,84	8,68	9,52	10,36	11,20
						5,60	6,72	7,84	8,96	10,08	11,20	12,32	13,44	14,56
							8,16	9,60	11,04	12,48	13,92	15,36	16,80	18,24
								11,40	13,20	15,00	16,80	18,60	20,40	22,20
									15,40	17,60	19,80	22,00	24,20	26,40
										20,24	22,88	25,52	28,16	30,80
											26,00	29,12	32,24	35,36
												32,76	36,40	40,04
													40,60	44,80
														49,60

2) при уравнивании по полиному третьей степени

№ точки	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	14
$\sigma^2_{\Delta i}$	0,04	0,08	0.07	0,09	0,15	0,16	0,10	0,09	0,16	0,15	0,08

Полученные результаты дают основания полагать, что остаточные дисперсии координат точек фототриангуляционного ряда зависят от расположения этих точек в ряду пространственной фототриангуляции. Максимальная дисперсия получится для точек, находящихся посередине между опорными точками, по ней можно судить о правильности выбора степени интерполяционного полинома и расстояния между опорными точками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипов И. Т. О геодезическом ориентировании цепей пространственной аналитической фототриангуляции. Тр. НИИГАиК, т. XX, 1967.
2. Уилкс С. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.

Работа поступила
11 января 1970 года