

Ш. Е. КУЗНЕЦОВА

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ВЫПОЛНЕНИЯ УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

При уравнивании равноточных величин, связанных условиями, в ряде задач геодезии и аналитической фотограмметрии возникают системы с большим количеством условных уравнений поправок. В этом случае появляется проблема операций с матрицами очень больших порядков при получении системы нормальных уравнений коррелат, при решении системы и определении поправок к уравниваемым величинам. Разрешение проблемы связано с большими трудностями даже при использовании современных ЭВМ, обладающих значительным объемом памяти. К тому же такие операции приводят к большим накоплениям ошибок округления, часто искажающим физический смысл поставленных задач.

Мы рассмотрим способ, который позволит избежать указанных трудностей для одного частного случая, когда матрица коэффициентов системы уравнений поправок состоит из некоторых комбинаций отрицательных и положительных единиц и нулей. Предлагаемый способ позволяет получать подматрицы малого порядка, составляющие матрицу, обратную матрице коэффициентов системы нормальных уравнений, из простой рекуррентной зависимости, минуя процессы составления системы нормальных уравнений коррелат и непосредственного обращения матрицы большого порядка. Использование этой рекуррентной зависимости требует лишь одного обращения подматрицы малого порядка и операций перемножения подматриц такого же порядка.

Кроме того, опишем способ непосредственного определения вектора поправок к уравниваемым величинам без использования процесса умножения матрицы на вектор коррелат.

Пусть сеть, состоящая из n фигур ($n = ij$), имеет вид, показанный на рис. 1. Если уравниваемые величины получаются при использовании всех геометрических связей, имеющих в данной сети и обозначенных на рис. 1 стрелками, тогда матрица A коэффициентов системы условных уравнений поправок

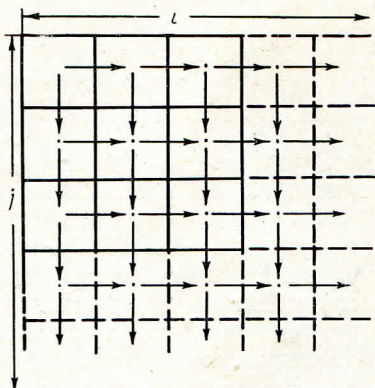


Рис. 1. Схема уравниваемой сети с указанием геометрических связей.

$$AV + W = 0 \quad (1)$$

имеет вид, показанный на рис. 2. При этом число условий $c = (j-1) \times (i-1)$, а число определяемых поправок $r = i(j-1)(i-1)$. При уравнении по способу коррелят имеем

$$AA'K + W = 0; \quad (2)$$

$$V = A'K, \quad (3)$$

где A' — транспонированная к A матрица. При непосредственном определении вектора коррелят как

$$K = -(AA')^{-1}W \quad (4)$$

необходимо перемножение матриц A и A' , после чего система (2) может быть решена любыми известными прямыми или итеративными методами, включая методы обращения матрицы (AA') .

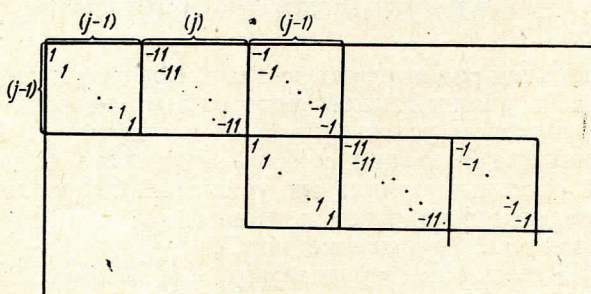


Рис. 2. Структура матрицы A коэффициентов системы условных уравнений поправок.

В случае уравнивания в блоке фототриангуляции величин, принятых за независимо измененные и равноточные, для блока, состоящего из 20 маршрутов по 20 моделей в каждом, размерность матриц A может быть порядка (381×760) . И тогда указанные операции провести гораздо труднее. Однако для структуры матрицы A (рис. 2) существует возможность избежать трудностей, так как матрица (AA') всегда имеет структуру, показанную на рис. 3. Очевидно, что матрица (AA') является квазиленточной отрицательно модулированной матрицей. Подматрицы a и $-E$ имеют размерность $(j-1) \times (j-1)$. $-E$ — отрицательная единичная матрица, а a содержит $(j-2)$ — перекрывающиеся элементарные

матрицы $\alpha = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Ясно, что при такой однообразной структуре нет необходимости определять матрицу коэффициентов системы

нормальных уравнений как произведение AA' . Рассмотрим вид обратной матрицы $(AA')^{-1}$, чтобы найти пути непосредственного определения такой матрицы без обычного процесса обращения. При этом будем рассматривать матрицу $(AA')^{-1}$ как симметричную блочную матрицу, состоящую из $(i-1) \times (i-1)$ клеток b размером $(j-1) \times (j-1)$. Так как

$$(AA')(AA')^{-1} = (AA')^{-1}(AA') = E,$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1(i-1)} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2(i-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{(i-1)1} & b_{(i-1)2} & \dots & b_{(i-1)(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -E \\ -E & a & -E \\ -E & a & -E \\ -E & a \end{bmatrix} = E, \quad (5)$$

$$\text{иначе} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{1(i-2)} = b_{1(i-1)} a \\ b_{1(i-3)} = b_{1(i-2)} a - b_{1(i-1)}. \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ b_{12} = b_{13} a - b_{14} \\ b_{11} = b_{12} a - b_{13} \\ b_{11} a - b_{12} = E \end{array} \right. \quad (6)$$

$$b_{1l} = b_{1(l+1)}a - b_{1(l+2)}. \quad (7)$$

И тогда, если мы найдем крайний элемент $b_{1(i-1)}$ строки, то сможем определить все элементы строки. Заметим, что любой элемент b_{il} может быть выражен как

$$b_{1l} = b_{1(i-1)} Q_l(a), \quad (8)$$

где $Q_l(a)$ — некоторый многочлен от a (a — известный уже элемент матрицы $(AA')^{-1}$; при этом $Q_l = Q_{(l+1)}a - Q_{(l+2)}$). Тогда первая блочная строка имеет вид: $b_{1(i-1)}[Q_1 \ Q_2 \ \dots \ E]$. Так как согласно (6) $b_{1(i-1)}Q_0 = b_{11}a - b_{12} = E$, то $b_{1(i-1)} = Q_0^{-1} = (Q_1a - Q_2)^{-1}$. Таким образом, нахождение исходного элемента $b_{1(i-1)}$ осуществляется по той же рекуррентной зависимости (7). Используя зависимости (5), нетрудно показать, что для верхней треугольной части матрицы $(AA')^{-1}$ зависимость (7) сохраняется для всех строк и столбцов, и кроме того, для матрицы $(AA)^{-1}$ имеет место равенство

$$bkl = blk = b(i-l)(i-k) = b(i-k)(i-l), \quad (9)$$

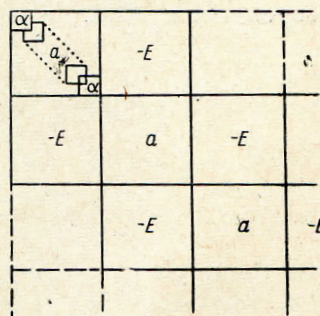


Рис. 3. Структура матрицы (АА) коэффициентов системы нормальных уравнений коррелат.

что дает, например, возможность вычислять матрицу $(AA')^{-1}$ по схеме, изображенной на рис. 3.

Итак, для получения обратной матрицы $(AA')^{-1}$ достаточно определить сначала матрицу Q_0 размерности $(j-1) \times (j-1)$ по рекуррентной зависимости (7) как $Q_{(i-1)} = E$; $Q_{(i-2)} = Q_{(i-1)}a - 0$; $Q_{(i-3)} = Q_{(i-2)}a - Q_{(i-1)}$; ... После чего осуществляется обращение матрицы Q_0 и все элементы (подматрицы) обратной матрицы отыскиваются по формуле (8) с использованием свойства, выраженного формулой (9). После отыскания вектора коррелят K (см. (4)) по формуле (3) определяется вектор поправок. Благодаря специфике структуры матрицы A можно определить вектор V без непосредственного решения по формуле (3). Если

$$V_{1 \times r} = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_I \ \dots \ V_i], \quad (10)$$

то для каждого минимального вектора $V_J = [v_1 v_2 \dots]$ получаем

$$V_J = [(-L_{J-1} + L_J), (L_J B)],$$

где $B_{(j-1)l} =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_l = [K_{(j-1)(j-1)+1}, K_{(j-1)(j-1)+2}, \dots, K_{I(l-1)}]; \quad L_0 = L_l = 0.$$

Так, для $i=j=5$ имеем $V_1 \times r = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_{40}] = [V_1 V_2 V_3 V_4 V_5]$.
 $V_1 = [(-L_0 + L_1), (L_1 B)]$; $V_2 = [(-L_1 + L_2), (L_2 B)]$; $V_3 = [(-L_2 + L_3), (L_3 B)]$;
 $V_4 = [(-L_3 + L_4), (L_4 B)]$; $V_5 = [(-L_4 + L_5), (L_5 B)]$; $L_0 = L_5 = 0$. $L_1 = [k_1 k_2 k_3 k_4]$;
 $L_2 = [k_5 k_6 k_7 k_8]$; $L_3 = [k_9 k_{10} k_{11} k_{12}]$; $L_4 = [k_{13} k_{14} k_{15} k_{16}]$. $V_1 = [k_1, k_2, k_3, k_4, (-k_1),$
 $(k_1 - k_2), (k_2 - k_3), (k_3 - k_4), k_4]$; $V_2 = [(-k_1 + k_5), (-k_2 + k_6), (-k_3 + k_7),$
 $(-k_4 + k_8), (-k_5), (k_5 - k_6), (k_6 - k_7), (k_7 - k_8), k_8]$; $V_3 = [(-k_5 + k_9),$
 $(-k_6 + k_{10}), (-k_7 + k_{11}), (-k_8 + k_{12}), (-k_9), (k_9 - k_{10}), (k_{10} - k_{11}), (k_{11} -$
 $-k_{12}), (k_{12})]$; $V_4 = [(-k_9 + k_{13}), (-k_{10} + k_{14}), (-k_{11} + k_{15}), (-k_{12} + k_{16}),$
 $(-k_{13}), (k_{13} - k_{14}), (k_{14} - k_{15}), (k_{15} - k_{16}), k_{16}]$; $V_5 = [(-k_{13}), (-k_{14}), (-k_{15}),$
 $(-k_{16})]$.

Таким образом, весь уравнительный процесс для сети указанного типа сводится к простым и однообразным операциям над матрицами небольшого порядка, легко описываемым несложными логическими схемами. Предлагаемый способ может быть реализован почти на всех современных ЭВМ.

Работа поступила
12 января 1970 года