УДК 528.735.2

Ю. С. ТЮФЛИН

ПОСТРОЕНИЕ СВОБОДНОЙ ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКОЙ СЕТИ С ВВЕДЕНИЕМ ВЕСОВ ПРИ СОЕДИНЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В настоящее время в Советском Союзе применяются различные способы построения фотограмметрических сетей аналитическим методом. Одним из них является способ независимых моделей, который разработан в ЦНИИГАиК [1, 2]. В нашей статье предлагается при соединении геометрических моделей вводить веса с учетом накопления ошибок их последовательного подсоединения и существующей корреляции между пространственными координатами точек.

После выполнения взаимного ориентирования снимков и вычисления пространственных координат точек в этой условной системе должна быть вычислена ковариационная матрица пространственных координат точек, участвующих при соединении смежных геометрических моделей. Для дальнейшего использования этой матрицы при пространственном фототриангулировании ее удобнее записывать так:

$$(K''_0)_p = \left[\begin{array}{c:c} (K''_0)'_p & (K''_{1-2})_p \\ \hdashline (K''_{1-2})^T_p & (K''_0)''_p \end{array} \right], \tag{1}$$

где $(K''_0)'_p$ — ковариационная подматрица пространственных координат точек p-й модели, расположенных в зоне общей с предыдущей геометрической моделью, ее порядок $(3m_{p-1} \times 3m_{p-1})$; $(K''_0)''_p$ — ковариационная подматрица пространственных координат точек p-й модели, расположенных в зоне общей с последующей геометрической моделью, ее порядок $(3m_p \times 3m_p)$; $(K''_{1-2})_p$ — подматрица порядка $(3m_p \times 3m_{p-1})$ с ковариациями между пространственными координатами точек двух зон модели; $(K''_{1-2})^T_p$ — подматрица, транспонированная к $(K''_{1-2})_p$.

Соединение смежных геометрических моделей начинают с того, что в системах координат предыдущей и последующей моделей определяют координаты центра тяжести (или взвешенного центра тяжести) фигуры, образованной с помощью точек, по которым выполняют соединение моделей.

После определения координат центров тяжести пространственные координаты точек приводят к одному началу

$$(X_к)''_p - (X_ц)''_p = (X_к)''^{*}_p,\ (Y_к)''_p - (Y_ц)''_p = (Y_к)''^{*}_p,\ (Z_к)''_p - (Z_ц)''_p = (Z_к)''^{*}_p;$$
$$(X_s)''_p - (X_ц)''_p = (X_s)''^{*}_p,\ (Y_s)''_p - (Y_ц)''_p = (Y_s)''^{*}_p,\ (Z_s)''_p - (Z_ц)''_p = (Z_s)''^{*}_p \tag{2}$$

и

$$(X''_k)'_{p+1} - (X''_ц)'_{p+1} = (X''_k)'^{*}_{p+1},\ (Y''_k)'_{p+1} - (Y''_ц)'_{p+1} = (Y''_k)'^{*}_{p+1},$$
$$(Z''_k)'_{p+1} - (Z''_ц)'_{p+1} = (Z''_k)'^{*}_{p+1};$$
$$(X''_s)'_{p+1} - (X''_ц)'_{p+1} = (X''_s)'^{*}_{p+1},\ (Y''_s)'_{p+1} - (Y''_ц)'_{p+1} = (Y''_s)''^{*}_{p+1}; \tag{3}$$
$$(Z''_s)'_{p+1} - (Z''_ц)'_{p+1} = (Z''_s)'^{*}_{p+1},\ k = 1, 2, \ldots, m_p,$$

где k — номер точки, участвующий при соединении p-й и $(p+1)$-й моделей; $(X_k)''_p$, $(Y_k)''_p$, $(Z_k)''_p$ — пространственные координаты точек p-й модели, участвующие при соединении с $(p+1)$-й моделью, вычисленные в исходной системе координат предыдущих моделей; $(X_s)''_p$, $(Y_s)''_p$, $(Z_s)''_p$ — координаты правого центра проектирования p-й модели в исходной системе координат; $(X''_k)'_{p+1}$, $(Y''_k)'_{p+1}$, $(Z''_k)'_{p+1}$ — пространственные координаты точек $(p+1)$-й независимой модели, вычисленные после выполнения процесса взаимного ориентирования снимков; $(X''_s)'_{p+1}=0$, $(Y''_s)'_{p+1}=0$, $(Z''_s)'_{p+1}=0$ — координаты левого центра проектирования $(p+1)$-й независимой модели.

Чтобы пространственные координаты точек (2) и (3) были равны, необходимо $(X''_k)'^*_{p+1}$, $(X''_s)'^*_{p+1}$, $(Y''_k)'^*_{p+1}$, $(Y''_s)'^*_{p+1}$, $(Z''_k)'^*_{p+1}$, $(Z''_s)'^*_{p+1}$ привести к исходной системе координат предыдущих моделей.

После этого строгие соотношения соединения p-й и $(p+1)$-й моделей запишутся так:

$$
\begin{aligned}
&(F_1)_p = (X_1)''^*_p - r_p\,[a_1^p\,(X''_1)'^*_{p+1} + a_2^p\,(Y''_1)'^*_{p+1} + a_3^p\,(Z''_1)'^*_{p+1}] + \Delta X_p = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(F_{m_p})_p = (X_{m_p})''^*_p - r_p\,[a_1^p\,(X''_{m_p})'^*_{p+1} + a_2^p\,(Y''_{m_p})'^*_{p+1} + a_3^p\,(Z''_{m_p})'^*_{p+1}] + \Delta X_p = 0;\\
&(F_{m_p+1})_p = (X_s)''^*_p - r_p\,[a_1^p\,(X''_s)'^*_{p+1} + a_2^p\,(Y''_s)'^*_{p+1} + a_3^p\,(Z''_s)'^*_{p+1}] + \Delta X_p = 0;\\
&(F_{m_p+2})_p = (Y_1)''^*_p - r_p\,[b_1^p\,(X''_1)'^*_{p+1} + b_2^p\,(Y''_1)'^*_{p+1} + b_3^p\,(Z''_1)'^*_{p+1}] + \Delta Y_p = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(F_{2m_p+1})_p = (Y_{m_p})''^*_p - r_p\,[b_1^p\,(X''_{m_p})'^*_{p+1} + b_2^p\,(Y''_{m_p})'^*_{p+1} + b_3^p\,(Z''_{m_p})'^*_{p+1}] + \Delta Y_p = 0;\\
&(F_{2m_p+2})_p = (Y_s)''^*_p - r_p\,[b_1^p\,(X''_s)'^*_{p+1} + b_2^p\,(Y''_s)'^*_{p+1} + b_3^p\,(Z''_s)'^*_{p+1}] + \Delta Y_p = 0; \quad (4)\\
&(F_{2m_p+3})_p = (Z_1)''^*_p - r_p\,[c_1^p\,(X''_1)'^*_{p+1} + c_2^p\,(Y''_1)'^*_{p+1} + c_3^p\,(Z''_1)'^*_{p+1}] + \Delta Z_p = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(F_{3m_p+2})_p = (Z_{m_p})''^*_p - r_p\,[c_1^p\,(X''_{m_p})'^*_{p+1} + c_2^p\,(Y''_{m_p})'^*_{p+1} + c_3^p\,(Z''_{m_p})'^*_{p+1} + \Delta Z_p = 0;\\
&(F_{3m_p+3})_p = (Z_s)''^*_p - r_p\,[c_1^p\,(X''_s)'^*_{p+1} + c_2^p\,(Y''_s)'^*_{p+1} + c_3^p\,(Z''_s)'^*_{p+1}] + \Delta Z_p = 0,
\end{aligned}
$$

где

$$r_p = 1 + \Delta r_p;$$

$$
\begin{aligned}
&a_1^p = \cos\varepsilon\cos\vartheta - \sin\varepsilon\sin\eta\sin\vartheta; &&b_1^p = \cos\eta\sin\vartheta;\\
&a_2^p = -\cos\varepsilon\sin\vartheta - \sin\varepsilon\sin\eta\cos\vartheta; &&b_2^p = \cos\eta\cos\vartheta; \qquad (5)\\
&a_3^p = -\sin\varepsilon\cos\eta; &&b_3^p = -\sin\eta;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&c_1^p = \sin\varepsilon\cos\vartheta + \cos\varepsilon\sin\eta\sin\vartheta;\\
&c_2^p = -\sin\varepsilon\sin\vartheta + \cos\varepsilon\sin\eta\cos\vartheta;\\
&c_3^p = \cos\varepsilon\cos\eta,
\end{aligned}
$$

ϑ_p, ε_p, η_p, r_p — углы поворота и масштабный коэффициент p-го соединения моделей.

Используя приближенные значения неизвестных $(\lambda_0)_p$ и пространственные координаты точек моделей, вычисляют приближенные значения функций (4)

$$
\begin{aligned}
(F_0)_p = [(F_{01})_p, \dots, (F_{0(m_p+1)})_p,\ (F_{0(m_p+2)})_p, \dots\\
\dots, (F_{0(2m_p+2)})_p,\ (F_{0(2m_p+3)})_p, \dots, F_{0(3m_p+3)})_p]^T. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

После этого для выполнения условий (4) к $(F_0)_p$ необходимо добавить ряд членов

$$(F_0)_p + A_p \Delta\lambda_p + B_p^* (\delta B)_p = 0, \tag{7}$$

где A_p — прямоугольная матрица порядка $(3m_p+3)\times 7$, строками которой являются частные производные функции (4) по каждому неизвестному; B_p^* — прямоугольная матрица, строками которой являются частные производные функции (4) по каждому значению пространственных координат точек; $\Delta\lambda_p$ — матрица-столбец поправок к значениям неизвестных

$$\Delta\lambda_p = [\Delta(\Delta X),\ \Delta(\Delta Y),\ \Delta(\Delta Z),\ \Delta(\Delta r),\ \Delta\vartheta,\ \Delta\varepsilon,\ \Delta\eta]_p^T; \tag{8}$$

$(\delta B)_p$ — матрица-столбец поправок к значениям пространственных координат точек.

Разобьем матрицы B_p^* и $(\delta B)_p$ на две подматрицы, тогда

$$(F_0)_p + A_p \Delta\lambda_p + B_p''^* (\delta B)_p'' + B_{p+1}'^* (\delta B'')_{p+1}' = 0, \tag{9}$$

где

$$(\delta B)_p'' = [(\delta X_1)_p'', \ldots, (\delta X_{m_p})_p'', (\delta X_s)_p'', (\delta Y_1)_p'', \ldots$$

$$\ldots, (\delta Y_{m_p})_p'', (\delta Y_s)_p'', (\delta Z_1)_p'', \ldots, (\delta Z_{m_p})_p'', (\delta Z_s)_p'']^T; \tag{10}$$

$$(\delta B'')_{p+1}' = [(\delta X_1'')_{p+1}', \ldots, (\delta X_{m_p}'')_{p+1}', (\delta Y_1'')_{p+1}', \ldots$$

$$\ldots, (\delta Y_{m_p}'')_{p+1}', (\delta Z_1'')_{p+1}', \ldots, (\delta Z_{m_p}'')_{p+1}']^T, \tag{11}$$

$B_p''^*$ — квадратная матрица порядка $(3m_p+3)\times(3m_p+3)$, строками которой являются частные производные функций (4) по каждому значению пространственных координат точек p-й модели, участвующих при соединении с $(p+1)$-й моделью; $B_{p+1}'^*$ — прямоугольная матрица порядка $(3m_p+3)\times 3m_p$, строками которой являются частные производные функции (4) по каждому значению пространственных координат точек $(p+1)$-й независимой модели, участвующих в p-м соединении моделей.

Матрица-столбец $(\delta B)_p''$ должна быть выражена через пространственные координаты точек независимых моделей и их дифференциалы; такое выражение для $(\delta B)_p''$ будет дано позднее.

Согласно предписанию способа наименьших квадратов квадратичную форму, подлежащую минимизации, представляем так:

$$[(F_0)_p + A_p \Delta\lambda_p]^T [B_p^* K_p B_p^{*T}]^{-1} [(F_0)_p + A_p \Delta\lambda_p] = \min, \tag{12}$$

где K_p — ковариационная матрица исходной информации;

$$[B_p^* K_p B^{*T}]^{-1} = P_p, \tag{13}$$

P_p — матрица весов. Поэтому нормальные уравнения записываем в виде

$$[A_p^T P_p A_p]\,\Delta\lambda_p + [A_p^T P_p (F_0)_p] = 0. \tag{14}$$

Из решения (14) определяем вектор поправок к приближенным значениям неизвестных $(\lambda_0)_p$, то есть

$$\Delta\lambda_p = [A_p^T P_p A_p]^{-1} [-A_p^T P_p (F_0)_p]. \tag{15}$$

После определения $\Delta\lambda_p$ значение $(\lambda_0)_p$ уточняем

$$\lambda_p = (\lambda_0)_p + (\Delta\lambda_p)_{\mathrm{I}}, \tag{16}$$

где $(\Delta\lambda_p)_{\mathrm{I}}$ — первое приближение определения вектора поправок.

Если вычисленные значения неизвестных (16) еще не удовлетворяют условиям (4), то итеративный процесс продолжают, вычисляют новые значения F_0, A и B^*, а затем и вектор поправок $(\Delta\lambda_p)_{\text{II}}$, который суммируют с (16). Окончанием процесса следует считать стабилизацию дисперсии единицы веса

$$\sigma_0^2 = \frac{R_0^2}{N-n}, \quad N = 3m_p + 3, \ n = 7, \tag{17}$$

где $-R_0^2 = (F_0{}^T PF_0)_i + (A^T PF_0)^T (\Delta\lambda_p)_i$ — остаточная сумма квадратов невязок; $(\Delta\lambda_p)_i$ — вектор поправок i-го приближения.

Теперь рассмотрим определение матрицы-столбца $(\delta B)''_p$, входящего в уравнение (9).

Формулы преобразования пространственных координат точек p-й независимой модели, расположенных в зоне смежной с $(p+1)$-й моделью, к исходной системе координат предыдущих моделей имеют вид:

$$(X_1)''_p = r_{p-1}[a_1^{p-1}(X''_1)''_p + a_2^{p-1}(Y''_1)''_p + a_3^{p-1}(Z''_1)''_p] - \Delta X_{p-1} +$$
$$+ r_{p-2}\, a_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta X_{p-2} + \cdots + r_1 a'_1 B_2 - \Delta X_1 + B_1;$$

. . . .

$$(X_{m_p})''_p = r_{p-1}[a_1^{p-1}(X''_{m_p})''_p + a_2^{p-1}(Y''_{m_p})''_p + a_3^{p-1}(Z''_{m_p})''_p - \Delta X_{p-1} +$$
$$+ r_{p-2}\, a_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta X_{p-2} + \cdots + r_1 a'_1 B_2 - \Delta X_1 + B_1;$$
$$(X_s)''_p = r_{p-1}\, a_1^{p-1} B_p - \Delta X_{p-1} + r_{p-2}\, a_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta X_{p-2} + \cdots$$
$$\cdots + r_1 a'_1 B_2 - \Delta X_1 + B_1;$$
$$(Y_1)''_p = r_{p-1}[b_1^{p-1}(X''_1)''_p + b_2^{p-1}(Y''_1)''_p + b_3^{p-1}(Z''_1)''_p] - \Delta Y_{p-1} +$$
$$+ r_{p-2}\, b_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Y_{p-2} + \cdots + r_1 b'_1 B_2 - \Delta Y_1;$$

. . . .

$$(Y_{m_p})''_p = r_{p-1}\, b_1^{p-1}(X''_{m_p})''_p + b_2^{p-1}(Y''_{m_p})''_p + b_3^{p-1}(Z''_{m_p})''_p] - \Delta Y_{p-1} +$$
$$+ r_{p-2}\, b_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Y_{p-2} + \cdots + r_1 b'_1 B_2 - \Delta Y_1;$$
$$(Y_s)''_p = r_{p-1}\, b_1^{p-1} B_p - \Delta Y_{p-1} + r_{p-2}\, b_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Y_{p-2} + \cdots + r_1 b'_1 B_2 - \Delta Y_1$$
$$(Z_1)''_p = r_{p-1}[c_1^{p-1}(X''_1)''_p + c_2^{p-1}(Y''_1)''_p + c_3^{p-1}(Z''_1)''_p] - \Delta Z_{p-1} +$$
$$+ r_{p-2}\, c_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Z_{p-2} + \cdots + r_1 a'_1 B_2 - \Delta Z_1;$$

. . . .

$$(Z_{m_p})''_p = r_{p-1}[c_1^{p-1}(X''_{m_p})''_p + c_2^{p-1}(Y''_{m_p})''_p + c_3^{p-1}(Z''_{m_p})''_p - \Delta Z_{p-1} +$$
$$+ r_{p-2}\, c_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Z_{p-2} + \cdots + r_1 a'_1 B_2 - \Delta Z_1; \tag{18}$$
$$(Z_s)''_p = r_{p-1}\, c_1^{p-1} B_p - \Delta Z_{p-1} + r_{p-2}\, c_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Z_{p-2} + \cdots + r_1 c'_1 B_2 - \Delta Z_1,$$

где $B_2, \ldots, B_{p-1}, B_p$ — базисы фотографирования, принятые для вычисления пространственных координат $2, \ldots, (p-1)$, p-й независимых моделей.

Используя (18), записываем $(\delta B)''_p$ в матричном виде

$$(\delta B)''_p = (A''_{p-1})''_{p-1}\, \delta\Delta\lambda_{p-1} + (A''_{p-2})''_{p-1}\, \delta\Delta\lambda_{p-2} + \cdots$$
$$\cdots + (A''_2)''_{p-1}\, \delta\Delta\lambda_2 + (A''_1)''_{p-1}\, \delta\Delta\lambda_1 + (B'')''_p\, (\delta B'')''_p, \tag{19}$$

где $(A''_{p-1})''_{p-1}$ — прямоугольная матрица порядка $(3m_p+3)\times 7$, составленная из частных производных функций (23) по каждому неизвестному $(p-1)$-го соединения моделей — λ_{p-1}; $(A''_{p-2})''_{p-1}, \ldots, (A''_2)''_{p-1}$,

$(A_1^{\prime})^{\prime\prime}_{p-1}$ — прямоугольные матрицы порядка $(3m_p+3)\times 7$, составленные из частных производных функций (18) соответственно по неизвестным $\lambda_{p-2},\ldots,\lambda_2,\lambda_1$; $(B^{\prime})^{\prime\prime}_p$ — прямоугольная матрица порядка $(3m_p+$ $+3)\times 3m_p$, составленная из частных производных функций (18) по каждому значению пространственных координат точек p-й модели;

$$(\delta B^{\prime})^{\prime}_p=[(\delta X^{\prime}_1)^{\prime}_p,\ldots,(\delta X^{\prime}_{m_p})^{\prime}_p,(\delta Y^{\prime}_1)^{\prime}_p,\ldots,(\delta Y^{\prime}_{m_p})^{\prime}_p,(\delta Z^{\prime}_1)^{\prime}_p,\ldots,(\delta Z^{\prime}_{m_p})^{\prime}_p]^T.$$

Теперь рассматриваем определения $\delta\Delta\lambda_{p-1},\ldots,\delta\Delta\lambda_1$, выражая их через известные величины и ошибки пространственных координат точек независимых геометрических моделей.

С помощью нормальных уравнений для последнего приближения итеративного процесса соединения $(p-1)$-й и p-й моделей

$$[A^T_{p-1}P_{p-1}A_{p-1}]\Delta\lambda_{p-1}+[A^T_{p-1}P_{p-1}(F_0)_{p-1}]=0$$

получаем

$$\delta\Delta\lambda_{p-1}=C_{p-1}[\delta A_{p-1}\Delta\lambda_{p-1}+(\delta F_0)_{p-1}]+Q_{p-1}\delta A^T_p l_{p-1},$$

где

$$Q_{p-1}=-[A_{p-1}P_{p-1}A_{p-1}]^{-1},\quad C_{p-1}=Q_{p-1}A^T_{p-1}P_{p-1},$$

$$l_{p-1}=P_{p-1}[(F_0)_{p-1}+A_{p-1}\Delta\lambda_{p-1}]$$

или

$$\delta\Delta\lambda_{p-1}=\{[\Delta(\Delta X)_{p-1}C_{p-1},\ \Delta(\Delta Y)_{p-1}C_{p-1},\ \Delta(\Delta Z)_{p-1}C_{p-1},$$

$$\Delta(\Delta r)_{p-1},\ \Delta\vartheta_{p-1}C_{p-1},\ \Delta\varepsilon_{p-1}C_{p-1},\ \Delta\eta_{p-1}C_{p-1},\ C_{p-1}]+$$

$$+[Q_1l^T_{p-1},\ldots,\ Q_7l^T_{p-1},\ 0]\}\cdot[\delta A_{1(p-1)},\ldots,\ \delta A_{7(p-1)},\ (\delta F_0)_{p-1}]^T,$$

где $Q,\ldots,\ Q_7$ — столбцы матрицы Q_{p-1}; 0 — нулевая матрица; $\delta A_{1(p-1)},\ldots,\delta A_{7(p-1)}$ — столбцы матрицы $\delta A_{(p-1)}$. Обозначая

$$[\Delta(\Delta X)_{p-1}C_{p-1}+Q_1l^T_{p-1}]=(U_1)_{p-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[\Delta\eta_{p-1}C_{p-1}+Q_7l^T_{p-1}]=(U_7)_{p-1},$$

получаем

$$\delta\Delta\lambda_{p-1}=(U_1)_{p-1}\delta A_{1(p-1)}+\cdots+(U_7)_{p-1}\delta A_{7(p-1)}+C_{p-1}(\delta F_0)_{p-1}.$$

Выражая элементы столбцов матрицы δA_{p-1} через полные дифференциалы коэффициентов матрицы A_{p-1}, состоящие из частных производных каждого элемента по каждому значению пространственных координат точек p-й независимой модели

$$\delta A_{1(p-1)}=(A_1)_{p-1}(\delta B^{\prime\prime})^{\prime}_p\ \ldots,\ \delta A_{7(p-1)}=(A_7)_{p-1}(\delta B^{\prime\prime})^{\prime}_p,$$

$$(\delta F_0)_{p-1}=B^{\prime\prime *}_{p-1}(\delta B)^{\prime\prime}_{p-1}+B^{\prime *}_p(\delta B^{\prime\prime})^{\prime}_p,$$

и учитывая, что

$$\delta A_{1(p-1)}=\delta A_{2(p-1)}=\delta A_{3(p-1)}=0,$$

записываем

$$\delta\Delta\lambda_{p-1}=(U_4)_{p-1}(A_4)_{p-1}(\delta B^{\prime\prime})^{\prime}_p+(U_5)_{p-1}(A_5)_{p-1}(\delta B^{\prime\prime})^{\prime}_p+$$

$$+(U_6)_{p-1}(A_5)_{p-1}(\delta B^{\prime\prime})^{\prime}_p+(U_7)_{p-1}(A_7)_{p-1}(\delta B^{\prime\prime})^{\prime}_p+$$

$$+(C)_{p-1}B^{\prime\prime *}_{p-1}(\delta B)^{\prime\prime}_{p-1}+(C)_{p-1}B^{\prime *}_p(\delta B^{\prime\prime})^{\prime}_p. \qquad (20)$$

Вводим обозначения

$$\delta\Delta\lambda_{p-1} = (B'')'_{p-1} (\delta B'')'_{p} + (B)''_{p-1} (\delta B)''_{p-1}, \tag{21}$$

поэтому

$$(\delta B)''_{p} = (B'')''_{p} (\delta B'')''_{p} + (A''_{p-1})''_{p-1} (B'')'_{p-1} (\delta B'')'_{p} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1} (B)''_{p-1} (\delta B)''_{p-1} + (A''_{p-2})''_{p-1} (B'')'_{p-2} (\delta B'')'_{p-1} +$$
$$+ (A''_{p-2})''_{p-1} (B)''_{p-2} (\delta B)''_{p-2} + \cdots + (A''_{2})''_{p-1} (B'')'_{2} (\delta B'')'_{3} +$$
$$+ (A''_{2})''_{p-1} (B)''_{2} (\delta B)''_{2} + (A''_{1})''_{p-1} (B'')'_{1} (\delta B'')'_{2} + (A''_{1})''_{p-1} (B)''_{1} (\delta B)''_{1}. \tag{22}$$

Нашей задачей является выражение $(\delta B)''_{p-1}$, $(\delta B)''_{p-2}$, ..., $(\delta B)''_{2}$, $(\delta B)''_{1}$ через ошибки пространственных координат точек независимых моделей $(\delta B'')''_{p-1}$, $(\delta B'')'_{p-1}$, $(\delta B'')''_{p-2}$, $(\delta B'')'_{p-2}$, ..., $(\delta B'')''_{2}$, $(\delta B'')'_{2}$ $(\delta B'')'_{1}$ и другие известные величины. С этой целью в (22) необходимо последовательно подставлять с соответствующими индексами соединения моделей (22). После таких подстановок и необходимых преобразований получаем

$$(\delta B)''_{p} = [B'_{p}]_{p} (\delta B'')'_{p} + [B''_{p}]_{p} (\delta B'')''_{p} + [B'_{p-1}]_{p} (\delta B'')'_{p-1} +$$
$$+ [B''_{p-1}]_{p} (\delta B'')''_{p-1} + \cdots + [B'_{2}]_{p} (\delta B'')'_{2} + [B''_{2}]_{p} (\delta B'')''_{2} +$$
$$+ [B''_{1}]_{p} (\delta B'')''_{1} \tag{23}$$

$$[B'_{p}]_{p} = (A''_{p-1})''_{p-1} (B'')'_{p-1};$$
$$[B'_{p-1}]_{p} = (A''_{p-2})''_{p-1} (B'')'_{p-2} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1} (B)''_{p-1} (A''_{p-2})''_{p-2} (B'')'_{p-2};$$
$$[B'_{p-2}]_{p} = (A''_{p-3})''_{p-1} (B'')'_{p-3} +$$
$$+ (A''_{p-2})''_{p-1} (B)''_{p-2} (A''_{p-3})''_{p-3} (B'')'_{p-3} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1} (B)''_{p-1} (A''_{p-3})''_{p-2} (B'')'_{p-3} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1} (B)''_{p-1} (A''_{p-2})''_{p-2} (B)''_{p-2} (A''_{p-3})''_{p-3} (B'')'_{p-3} \tag{24}$$

. . . .

. . . .

и

$$[B''_{p}]_{p} = (B'')''_{p}; \quad [B''_{p-1}]_{p} = (A''_{p-1})''_{p-1} (B)''_{p-1} (B'')''_{p-1};$$
$$[B''_{p-2}]_{p} = (A''_{p-2})''_{p-1} (B)''_{p-2} (B'')''_{p-2} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1} (B)''_{p-1} (A''_{p-2})''_{p-2} (B)''_{p-2} (B'')''_{p-2};$$
$$[B''_{p-3}]_{p} = (A''_{p-3})''_{p-1} (B)''_{p-3} (B'')''_{p-3} +$$
$$+ (A''_{p-2})''_{p-1} (B)''_{p-2} (A''_{p-3})''_{p-3} (B)''_{p-3} (B'')''_{p-3} + \tag{25}$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1} (B)''_{p-1} (A''_{p-3})''_{p-2} (B)''_{p-3} (B'')''_{p-3} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1} (B)''_{p-1} (A''_{p-2})''_{p-2} (B)''_{p-2} (A''_{p-3})''_{p-3} (B)''_{p-3} (B'')''_{p-3}.$$

Рассматривая (24) и (25), нетрудно заметить рекуррентный закон построения последующих матриц, входящих в (33), то есть $[B'_{p-4}]_p$, $[B'_{p-5}]_p, \ldots, [B'_3]_p, [B'_2]_p$ и $[B''_{p-4}]_p, [B''_{p-5}]_p, \ldots, [B''_2]_p, [B''_1]_p$.

Обозначая

$$\| [B_p]_p \mid [B''_p]_p \| = [B_p]_p. \quad \| [B'_{p-1}]_p \mid [B''_{p-1}]_p \| = [B_{p-1}]_p, \ldots$$

$$\ldots, \| [B'_2]_p \mid [B''_2]_p \| = [B_2]_p;$$

$$\left[\frac{(\delta B'')'_p}{(\delta B'')''_p} \right] = \delta B''_p, \left[\frac{(\delta B'')'_{p-1}}{(\delta B'')''_{p-1}} \right] = \delta B''_{p-1}$$

$$\ldots, \left[\frac{(\delta B'')'_2}{(\delta B'')''_2} \right] = \delta B''_2, \ (\delta B'')''_1 = \delta B''_1,$$

записываем

$$(\delta B)''_p = [B''_1]_p \, \delta B''_1 + [B_2]_p \, \delta B''_2 + \cdots + [B_{p-1}]_p \, \delta B''_{p-1} + + [B_p]_p \, \delta B''_p. \qquad (26)$$

В связи с этим ковариационная матрица вектора пространственных координат точек с учетом накопления ошибок фотограмметрических построений $(\delta B)_p''$ запишется так:

$$K'_p = I_p \begin{bmatrix} (K''_0)'_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (K''_0)_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (K''_0)_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (K''_0)_p \end{bmatrix} I_p^T, \qquad (27)$$

где I_p — матрица Якоби,

$$I_p = \| [B''_1]_p \mid [B_2]_p \mid \ldots \mid [B_{p-1}]_p \mid [B_p]_p \|, \qquad (28)$$

$(K''_0)_p, (K''_0)_{p-1}, \ldots, (K''_0)_2, (K''_0)_1$ — ковариационные матрицы, аналогичные (1) соответственно p, $(p-1), \ldots \ldots, 2$ и 1-й геометрических моделей, вычисленные после выполнения процессов взаимного ориентирования для всех снимков маршрута.

Диагональные элементы матрицы (27), являющиеся дисперсиями пространственных координат точек и правого центра проектирования могут быть использованы для вычисления взвешенного центра тяжести p-й модели. Для вычисления взвешенного центра тяжести $(p+1)$-й независимой модели используются диагональные элементы матрицы $(K_0'')'_{p+1}$, аналогичной (1).

Для введения весов в пространственном фототриангулировании используется формула (13), которая в развернутом виде записывается так:

$$P_p = [B^*_p K_p B^{*T}]^{-1} = [B''^*_p K'_p B''^{*T}_p + B'^*_{p+1} (K''_0)'_{p+1} B'^{*T}_{p+1}]^{-7}.$$

Матрица (27) помимо введения весов при пространственном фототриангулировании может быть использована также для подсчета накопления ошибок в сетях и соответствующих корреляций.

Принципы соединения независимых моделей с введением весов могут быть распространены и на другие способы построения фотограмметрических сетей (например, по триплетам и подблокам).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коншин М. Д. и Полякова В. А. Аналитический способ построения одномаршрутных фотограмметрических сетей. Труды ЦНИИГАиК, вып. 165, 1966.

2. Полякова В. А. Результаты исследований новой программы аналитической фототриангуляции. «Геодезия и картография», 1968, № 11.

Работа поступила
9 октября 1970 г.