РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 16

ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.181

В. А. БЕЛЯЕВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕСОВ НАБЛЮДАЕМЫХ ВЕЛИЧИН

До настоящего времени задача оптимального распределения весов наблюдаемых величин применялась лишь к базисным сетям. Ниже мы покажем, что эту задачу можно ставить и решить для любых функций и сетей, например для продольной или поперечной ошибки ряда триангуляции и т. д.

Идея метода принадлежит шведскому математику Элфвингу. Он показал в [5], что для случая двух неизвестных и одной линейной функции этих неизвестных задача оптимального распределения весов для получения указанной функции с наименьшей дисперсией сводится к построению на плоскости минимального выпуклого многоугольника (рис. 1), содержащего все точки, координаты которых представляют собой коэффициенты при неизвестных в уравнениях ошибок, и нахождения точки пересечения этого многоугольника с вектором, координаты которого есть коэффициенты f_1 и f_2 функции

$$F = f_1 x_1 + f_2 x_2.$$

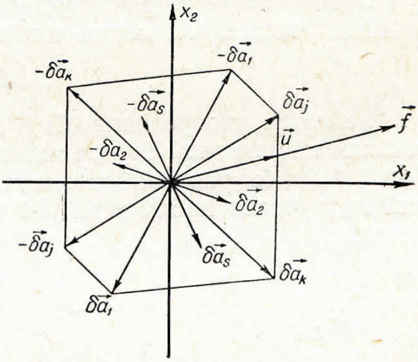

Рис. 1. Схема выпуклого многоугольника.

Ниже приведем обобщение этой идеи на любое число неизвестных и покажем, что задача оптимального распределения весов наблюдаемых величин для получения функции этих неизвестных с минимальной дисперсией есть задача линейного программирования, решение которой непосредственно дает искомые веса. Число отличных от нуля весов не превосходит числа необходимых измерений, а в случае, когда оно равно ему, все остальные элементы сети могут быть определены и использованы.

Поэтому в некоторых специальных случаях может быть предложен следующий оптимальный план производства измерений. Рассчитав веса необходимых измерений для получения нужной нам функции с наибольшим весом, все остальные измерения либо производят, либо не производят в зависимости от назначения сети. Во всяком случае второй этап работ может быть выполнен менее точными инструментами и менее квалифицированными исполнителями.

Будем считать, что измеряемые величины не зависимы, и ошибки измерений распределены с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной σ^2, а оценки для неизвестных и их дисперсий получены по методу наименьших квадратов. Если эти условия не выполнить, то решение будет неверным.

Пусть в эвклидовом пространстве

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots \ x_n)$$

есть вектор необходимых неизвестных, $\vec{a}_i$ — вектор i-го наблюдения

$$\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),$$

координаты которого суть коэффициенты i-го уравнения ошибок

$$v_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s,$$

где l_i — свободный член.

Вектор $\vec{f}$ имеет координаты

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

которые являются коэффициентами оцениваемой функции

$$F = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n.$$

Пусть A — матрица уравнений ошибок с элементами a_{ij} ранга n, $j = 1, 2, \ldots, n$. $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — веса измеряемых величин, причем

$$\sum_{i=1}^{s} p_i = 1; \quad p_i \geqslant 0. \tag{1}$$

Задача ставится следующим образом. Найти $p_1, p_2, \ldots, p_s$, удовлетворяющие условия (1), такие, чтобы функция F имела наименьшую дисперсию

$$D^2F = \min.$$

Заметим, что условия (1) в сущности ограничивают число измерений, так как в противном случае минимум D^2F достигался бы, когда число измерений было бы равным бесконечности. Если общее заданное число наблюдений m, а число наблюдений i-й измеряемой величины m_i (не обязательно целое), то

$$p_i = \frac{m_i}{m}.$$

Имеем

$$D^2F = D^2 \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = D^2 \sum_{i=1}^{s} c_i l_i, \tag{2}$$

где $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_s) = PA\vec{z}$, а P — диагональная матрица весов; z есть решение уравнения

$$A'PA\vec{z} = \vec{f},$$

где $A'PA$ — матрица нормальных уравнений.

Далее

$$D^2 \sum_{i=1}^{s} c_i l_i = \sum_{i=1}^{s} c_i^2 \frac{\sigma^2}{m_i} = \frac{\sigma^2}{m} \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i^2}{p_i}, \tag{3}$$

так как

$$D^2 l_i = \frac{\sigma^2}{m_i}; \quad m_i = mp_i.$$

Таким образом, мы выразили дисперсию функции F через дисперсию непосредственно измеренных величин, ибо последние по условию не зависимы.

Теперь будем искать минимум выражения (3).

Заметим, что предложенный Элфвингом метод отыскивания оптимальных весов отличается от классического метода Шрейбера [1] принципиально иным способом отыскания минимума D^2F. Последнее позволило нам применить простой и известный вычислительный прием, который непосредственно дает неизвестные веса.

Сначала найдем минимум (3) по переменным $p_1, p_2, \ldots, p_s$ при фиксированных значениях $c_1, c_2, \ldots, c_s$.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{c_i^2}{p_i} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{c_i}{\sqrt{p_i}}\right)^2 \sum_{i=1}^{s} (\sqrt{p_i})^2,$$

где второй множитель в правой части равен единице согласно (1). На основании неравенства Коши

$$\frac{\sigma^2}{m} \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i^2}{p_i} \geqslant \frac{\sigma^2}{m} \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{|c_i|}{\sqrt{p_i}} \cdot \sqrt{p_i}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{m} \left(\sum_{i=1}^{s} |c_i|\right)^2.$$

Равенство достигается при коллинеарности векторов

$$\left(\frac{|c_1|}{\sqrt{p_1}}, \frac{|c_2|}{\sqrt{p_2}}, \ldots, \frac{|c_s|}{\sqrt{p_s}}\right)$$

и

$$(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_s}),$$

то есть если компоненты этих векторов будут пропорциональны

$$\frac{|c_i|}{\sqrt{p_i}} = \lambda \sqrt{p_i}, \tag{4}$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{s} |c_i| = \lambda. \tag{5}$$

Теперь найдем минимум λ.

Здесь важнейшим является то, что вектор $\vec{f}$ есть линейная комбинация строк матрицы A с коэффициентами $c_1, c_2, \ldots, c_s$, то есть

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^{s} c_i \vec{a}_i.$$

Доказательство этого факта можно найти в [3] в разделе о функциях, допускающих оценку.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{s} c_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{s} |c_i| \delta_i \vec{a}_i,$$

где $\delta_i = \operatorname{sign} c_i$ (знак c_i).

Из (5)

$$c_i = p_i \lambda.$$

Таким образом,

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^{2s} p_i \lambda \delta_i \vec{a}_i = \lambda \sum_{i=1}^{2s} p_i \delta_i \vec{a}_i, \tag{6}$$

то есть вектор $\vec{f}$ коллинеарен вектору

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{2s} p_i \delta_i \vec{a}_i, \tag{7}$$

который в свою очередь является выпуклой линейной комбинацией векторов $\delta_i\vec{a}_i$ (см. [4]).

Пусть Г — наименьший выпуклый многогранник, содержащий все векторы $\pm\vec{a}_i$. Любая точка, принадлежащая ему, может быть записана в виде

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{2s} p_i\delta_i\vec{a}_i.$$

Величина λ достигнет минимума, когда

$$\|\vec{u}\| = \max. \tag{8}$$

Но вектор $\vec{u}$ не может выйти за пределы Г согласно (7), поэтому норма его достигнет максимального значения на границе Г.

На рис. 1 показана двумерная аналогия приведенного доказательства. По координатам $\pm(a_{i1}, a_{i2})$ в системе координат x_1x_2 накладывают все $2s$ точек $\pm\vec{a}_i$, где i — номер уравнения ошибок, и точку $\vec{f}$ по координатам f_1 и f_2. Точки $\delta_k\vec{a}_k$ и $\delta_j\vec{a}_j$, лежащие в вершинах выпуклого многоугольника, определяют его сторону, на которой лежит точка $\vec{u}$,

$$\vec{u} = p_k\delta_k\vec{a}_k + p_j\delta_j\vec{a}_j,$$

откуда найдем p_k и p_j. Все остальные веса равны нулю.

Покажем теперь, что задача отыскания чисел $p_1, \dots, p_s$ при условиях (1) для получения функции необходимых неизвестных с минимальной дисперсией есть задача линейного программирования, записанная в каноническом виде относительно переменных $p_1, \dots, p_{2s}$.

Пусть γ — прямая, которая проходит через начало координат и точку $\vec{f}$. Ее уравнение имеет вид

$$\frac{x_1}{f_1} = \frac{x_2}{f_2} = \cdots = \frac{x_n}{f_n} —$$

всего $n-1$ равенств.

Любая точка $\vec{x}$, принадлежащая множеству Г, может быть записана в виде

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{2s} p_i\delta_i\vec{a}_i$$

в силу выпуклости множества Г; или в координатной форме

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^{2s} p_i\delta_i a_{i1}, \\ x_2 &= \sum_{i=1}^{2s} p_i\delta_i a_{i2}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \sum_{i=1}^{2s} p_i\delta_i a_{in}. \end{aligned} \tag{9}$$

В пределах множества Г эти соотношения должны выполняться и для точек прямой γ, поэтому равенства (9) имеют вид

$$\frac{\sum_{i=1}^{2s} p_i\delta_i a_{i1}}{f_1} = \frac{\sum_{i=1}^{2s} p_i\delta_i a_{i2}}{f_2} = \cdots = \frac{\sum_{i=1}^{2s} p_i\delta_i a_{in}}{f_n}. \tag{10}$$

‹у›словия (1) запишем в виде

$$\sum_{1=i}^{2s} p_i = 1; \quad p_i \geqslant 0. \tag{11}$$

‹С›оотношения (10) и (11) образуют систему ограничений задачи линейного ‹пр›ограммирования в каноническом виде относительно $2s$ переменных ‹p_1›, $p_2, \ldots, p_{2s}$.

Теперь составим целевую функцию. (8) будет иметь место, когда при лю‹б›ом $f_k \neq 0$

$$\left| \sum_{i=1}^{2s} p_i \delta_i a_{ik} \right| = \max. \tag{12}$$

‹П›ри $f_k > 0$ (12) примет вид

$$\sum_{i=1}^{2s} p_i \delta_i a_{ik} = \max.$$

‹П›ри $f_k < 0$ (12) примет вид

$$\sum_{i=1}^{2s} p_i \delta_i a_{ik} = \min.$$

Итак, за целевую функцию можно принять любой из числителей (10).

Число неизвестных $p_1, \ldots, p_{2s}$ можно уменьшить на основании следующих соображений. В разложении (7) любой из векторов $\delta_i a_i$ может встре-

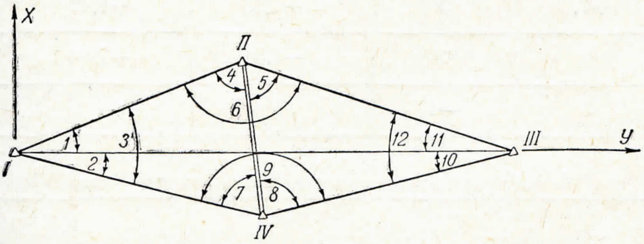

Рис. 2. Схема расположения пунктов и углов.

титься только со знаком плюс или минус, а вектор $\vec{u}$ может быть линейной комбинацией лишь тех векторов $\delta_i \vec{a}_i$, которые образуют неотрицательные скалярные произведения с вектором $\vec{f}$. (Иными словами, лишь тех векторов $\delta_i \vec{a}_i$, которые направлены «в ту же сторону», что и вектор $\vec{f}$).

Поэтому, прежде чем составлять уравнения (10), необходимо определить знак скалярного произведения $(\vec{f}, \ \delta_i \vec{a}_i)$.

Пример. Распределить данную сумму весов угловых измерений так, чтобы выходная сторона базисной сети (рис. 2) была получена с наибольшим весом.

Как обычно, за неизвестные принимаем координаты концов выходной стороны. Координаты концов базиса считаем твердыми. Ось ординат принимаем направленной вдоль выходной стороны. Последнее условие не обязательно и даже излишне, так как в дальнейшем при уравнивании придется вновь составлять уравнения ошибок. Мы поступаем таким образом только для того, чтобы сравнить предлагаемый способ с классическим. (Исходную сумму весов примем равной числу измеряемых углов, то есть 12).

По чертежу сети вычисляем коэффициенты уравнений ошибок для направлений, затем составляем уравнения ошибок для направлений без свободных членов и уравнения ошибок для углов (табл. 1). Функция выходной стороны имеет вид

$$F = -x_2 + x_4,$$

а вектор $\vec{f}$ имеет такие координаты:

$$(0, -1, 0, +1).$$

Таблица 1

Уравнения ошибок для углов

№ углов	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$(\vec{f}, \vec{a}_i)$
1	+7,22	−5,86	+7,64	0	+5,86
2	−6,62	−3,54	−7,64	0	+3,54
3	+0,48	−9,40	0	0	+9,40
4	−14,76	+5,86	0	0	−5,86
5	0	0	−12,92	−4,40	−4,40
6	−14,76	+5,86	−12,92	−4,40	−10,26
7	+14,28	+3,54	0	0	−3,54
8	0	0	+14,28	−3,54	−3,54
9	+14,28	+3,54	+14,28	−3,54	−7,08
10	−7,64	0	−6,62	+3,54	+3,54
11	+7,64	0	+5,28	+4,40	+4,40
12	0	0	−1,36	+7,94	+7,94
f	0	−1	0	+1	

Таблица 2

Преобразованные уравнения ошибок для углов

№ углов	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}
1	+7,12	−5,86	+7,64	0
2	−6,62	−3,54	−7,64	0
3	+0,48	−9,40	0	0
4	+14,76	−5,86	0	0
5	0	0	+12,92	+4,40
6	+14,76	−5,86	+12,92	+4,40
7	−14,28	−3,54	0	0
8	0	0	−14,28	+3,54
9	−14,28	−3,54	−14,28	+3,54
10	−7,64	0	−6,62	−3,54
11	+7,64	0	+5,28	+4,40
12	0	0	−1,36	+7,94

В последнем столбце табл. 1 даны скалярные произведения $(\vec{a}_i, \vec{f})$, вычисленные по формуле

$$(\vec{a}_i, \vec{f}) = a_{i1}f_1 + a_{i2}f_2 + \cdots + a_{in}f_n.$$

В тех строках табл. 1, где $(\vec{a}_i, \vec{f}) < 0$, меняем все знаки на противоположные и записываем в табл. 2; остальные строки переносим без изменения. В последнем столбце табл. 2 записываем неизвестные веса.

Уравнение прямой γ в данном случае запишется:

$$x_1 = 0; \quad \frac{x_2}{-1} = \frac{x_4}{+1}; \quad x_3 = 0,$$

или

$$x_1 = 0; \quad x_2 + x_4 = 0; \quad x_3 = 0.$$

Поэтому система линейных ограничений и целевая функция будут иметь вид

$$\sum_{i=1}^{12} a_{i1} p_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{12} (a_{i2} + a_{i4})\, p_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{12} a_{i3} p_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{12} p_i = 1; \quad \sum_{i=1}^{12} a_{i4} p_i = \max.$$

Коэффициентами первого уравнения будут элементы первого столбца табл. 2, второго уравнения — сумма элементов второго и четвертого столбцов, третьего уравнения — элементы третьего столбца. Коэффициенты четвертого уравнения все равны единице. Коэффициенты целевой функции являются элементами четвертого столбца табл. 2.

Таблица 3

Линейные ограничения и целевая функция

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	
+7,12	−6,62	+0,48	+14,76	0	+14,76	−14,28	0	−14,28	−7,64	+7,64	0	0
−5,86	−3,54	−9,40	−5,86	+4,40	−4,46	−3,54	+3,54	0	−3,54	+4,40	+7,94	0
+7,64	−7,64	0	0	+12,92	+12,92	0	−14,28	−14,28	−6,62	+5,28	−1,36	0
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	−1
0	0	0	0	+4,40	+4,40	0	+3,54	+3,54	−3,54	+4,40	+7,94	=max

Линейные ограничения и целевую функцию записываем в виде табл. 3, которая не требует пояснений.

Мы не приводим здесь решения симплекс-методом, он хорошо изложен в [2], а дадим готовый ответ:

$$p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = p_8 = p_9 = p_{10} = p_{11} = 0;$$
$$p_3 = 0{,}40; \quad p_6 = 0{,}05; \quad p_7 = 0{,}06; \quad p_{12} = 0{,}49,$$

откуда

$$m_1 = m_2 = m_4 = m_5 = m_8 = m_9 = m_{10} = m_{11} = 0;$$
$$m_3 = 4{,}8; \quad m_6 = 0{,}6; \quad m_7 = 0{,}7; \quad m_{12} = 5{,}9.$$

Для сравнения приведем весовую матрицу и значение $\frac{1}{P_F}$, 1) когда все 12 углов измерены весом, равным единице и 2) после распределения весов:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} +0{,}151 & +0{,}045 & -0{,}093 & -0{,}007 \\ +0{,}045 & +0{,}471 & -0{,}007 & +0{,}106 \\ -0{,}094 & -0{,}007 & +0{,}166 & +0{,}007 \\ -0{,}008 & +0{,}106 & +0{,}007 & +0{,}662 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{P_F} = 0{,}921.$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} +0{,}684 & -0{,}018 & -0{,}751 & -0{,}134 \\ -0{,}011 & +0{,}337 & +0{,}131 & +0{,}023 \\ -0{,}751 & +0{,}123 & +1{,}795 & +0{,}231 \\ -0{,}134 & +0{,}023 & +0{,}231 & +0{,}292 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{P_F} = 0{,}583$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайдаев Н. А. Уравнивание триангуляции. Геодезиздат, М., 1960.
2. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. «Наука», М., 1967.
3. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. Физматгиз, М., 1963.
4. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Физматгиз М., 1963.
5. Elfving G. Optimum allocation in linear regression theory, Ann. Math. Stat. vol. 23 (1952).

Работа поступила 26 октября 1970 года
Рекомендована кафедрой инженерной геодези
Киевского инженерно-строительного института