УДК 528.23

А. С. ЛИСИЧАНСКИЙ

КОНФОРМНАЯ ПРОЕКЦИЯ ЧЕБЫШЕВА МЕРИДИОНАЛЬНОЙ ЗОНЫ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Из всех проекций, применяемых в мировой практике для обработки геодезических измерений и построения топографических карт (так называемых геодезических проекций), наиболее целесообразными признаны конформные. Среди них самое широкое распространение получили поперечные цилиндрические проекции, симметричные относительно экватора и некоторого меридиана: проекция Гаусса и проекция *UTM* (Universal Transversal Merkator) или Гаусса—Боага.

В практике такие проекции применяются как многополосные. Полосы, именуемые координатными зонами, представляют собой сфероидические двуугольники, сторонами которых служат два полумеридиана с разностью долгот шесть или три градуса. Средний меридиан зоны, называемый осевым, является осью симметрии данной зоны при отображении ее на плоскости.

В упомянутых проекциях масштаб на осевом меридиане минимален и равен постоянной наперед заданной величине: в проекции Гаусса — 1, а в проекции *UTM* — 0,9996. С удалением от осевого меридиана масштаб возрастает и достигает максимальной величины на крайних меридианах зоны, где, являясь переменным, в свою очередь, принимает максимальное значение на экваторе. Изоколы в этих проекциях имеют вид, близкий к прямым линиям, параллельным осевому меридиану.

Однако известно, что наивыгоднейшей в смысле критерия Чебышева конформной проекцией любой замкнутой области поверхности эллипсоида является та, масштаб длин которой на границе этой области сохраняет постоянную величину [3]. Другими словами, только при соблюдении упомянутого условия амплитуда масштаба длин в пределах изображаемой на плоскости области будет наименьшей. Ни проекция Гаусса, ни проекция *UTM* для меридиональной зоны не являются в этом смысле наивыгоднейшими. Поэтому обратимся к рассмотрению такой конформной проекции меридиональной зоны земного эллипсоида, масштаб длин которой на граничных меридианах этой зоны постоянен и равен 1. Согласно принятой в математической картографии терминологии, такую проекцию будем называть проекцией Чебышева для меридиональной зоны. Причем, мы не преследуем цель полностью изложить теорию этой проекции и получить все формулы, которые необходимы в практике применения геодезической проекции. Ограничимся лишь изложением одного из возможных путей получения такой проекции и выясним, насколько искажения в ней будут меньше искажений проекции Гаусса.

Уравнения всякой конформной проекции, симметричной относительно экватора и некоторого меридиана, для области сравнительно небольшой протяженности по долготе имеют вид [2]:

$$x = x_0 - \frac{l^2}{2!}\frac{d^2x_0}{dq^2} + \frac{l^4}{4!}\frac{d^4x_0}{dq^4} - \frac{l^6}{6!}\frac{d^6x_0}{dq^6} + \ldots$$

$$y = l\frac{dx_0}{dq} - \frac{l^3}{3!}\frac{d^3x_0}{dq^3} + \frac{l^5}{5!}\frac{d^5x_0}{dq^5} - \ldots, \qquad (1)$$

где x, y — плоские прямоугольные координаты точки; q — изометрическая широта этой точки; l — долгота ее, отсчитанная от осевого меридиана; x_0 — абсцисса точки осевого меридиана, имеющей широту q.

Изометрическая широта q определяется равенством

$$q = \int_0^B \frac{M}{r}\,dB, \qquad (2)$$

где B — геодезическая широта; M — радиус кривизны меридиана; r — радиус параллели.

Абсцисса x_0 определяется равенствами

$$x_0 = \int_0^q m_0 r dq = \int_0^B m_0 M dB, \tag{3}$$

где m_0 — масштаб на осевом меридиане.

Как видим из формул (1) и (3), конкретный вид конформной проекции из рассматриваемого класса вполне определяется уравнением изображения осевого меридиана [1], то есть заданием всего лишь одной функции $x_0 = f(q)$, которая, в свою очередь, однозначно определяется масштабом m_0 на осевом меридиане, как некая произвольная функция широты q (или B).

Логарифм натуральный масштаба m в произвольной точке проекции, определяемой уравнениями (1), выражается рядом [2]:

$$\ln m = \ln m_0 - \frac{l^2}{2!}\frac{d^2 \ln \nu_0}{dq^2} + \frac{l^4}{4!}\frac{d^4 \ln \nu_0}{dq^4} - \ldots, \tag{4}$$

где

$$\ln \nu_0 = \ln m_0 + \ln r. \tag{5}$$

Если к обеим частям равенства (4) прибавить $\ln r$, то можно записать

$$\ln \nu = \ln \nu_0 - \frac{l^2}{2!}\frac{d^2 \ln \nu_0}{dq^2} + \frac{l^4}{4!}\frac{d^4 \ln \nu_0}{dq^4} - \frac{l^6}{6!}\frac{d^6 \ln \nu_0}{dq^6} + \ldots, \tag{6}$$

где

$$\ln \nu = \ln m + \ln r. \tag{7}$$

Путем дифференциального обращения ряда (6) виразим $\ln \nu_0$ в виде функции от $\ln \nu$, учитывая при этом, что последний является функцией q и l. Так, в первом приближении принимаем, что $\ln \nu_0 = \ln \nu$, и тогда, дважды дифференцируя это равенство по q с той же степенью точности, получим

$$\frac{d^2 \ln \nu_0}{dq^2} = \frac{\partial^2 \ln \nu}{\partial q^2}.$$

После этого, подставив полученное в (6), во втором приближении имеем

$$\ln \nu_0 = \ln \nu + \frac{l^2}{2!}\frac{\partial^2 \ln \nu}{\partial q^2}$$

и далее с той же точностью получим

$$\frac{d^2 \ln \nu_0}{dq^2} = \frac{\partial^2 \ln \nu}{\partial q^2} + \frac{l^2}{2!}\frac{\partial^4 \ln \nu}{\partial q^4}, \quad \frac{d^4 \ln \nu_0}{dq^4} = \frac{d^4 \ln \nu}{\partial q^4}.$$

После этого в третьем приближении имеем

$$\ln \nu_0 = \ln \nu + \frac{l^2}{2!}\frac{\partial^2 \ln \nu}{\partial q^2} + \frac{5\, l^4}{4!}\frac{\partial^4 \ln \nu}{\partial q^4}.$$

Действуя аналогичным образом, далее найдем

$$\ln \nu_0 = \ln \nu + \frac{E_1}{2!} \frac{\partial^2 \ln \nu}{\partial q^2} l^2 + \frac{E_2}{4!} \frac{\partial^4 \ln \nu}{dq^4} l^4 + \frac{E_3}{6!} \frac{\partial^6 \ln \nu}{\partial q^6} l^6 + \ldots, \quad (8)$$

где E_i — числа Эйлера $E_1=1$, $E_2=5$, $E_3=61$, $E_4=1385$, $E_5=$ $=50521$ и т. д.

Теперь, прининмая во внимание равенства (5) и (7), логарифм натуральный масштаба на осевом меридиане зоны, выраженный через логарифм натуральный масштаба в произвольной точке, запишем следующим образом:

$$\ln m_0 = \ln m + \frac{E_1}{2!} \frac{\partial^2 \ln m}{\partial q^2} l^2 + \frac{E_2}{4!} \frac{\partial^4 \ln m}{\partial q^4} l^4 + \frac{E_3}{6!} \frac{\partial^6 \ln m}{\partial q^6} l^6 + \ldots;$$

$$+ \frac{E_1}{2\,!} \frac{d \ln r}{dq^2} l^2 + \frac{E_2}{4!} \frac{d^4 \ln r}{dq^4} l^4 + \frac{E_3}{6!} \frac{d^6 \ln r}{dq^6} + \ldots. \quad (9)$$

Полученная формула показывает, что масштаб на осевом меридиане зоны вполне определяется, если задаться долготой $l=l_k$ того меридиана, на котором масштаб $m=m_k$ является постоянным, то есть не зависит от широты. Так, принимая $m_k=1$, найдем формулу логарифма масштаба на осевом меридиане проекции Чебышева зоны с долготой крайних меридианов $\pm l_k$. А именно, в этом случае $\ln m$ на крайнем меридиане зоны будет тождественно равен нулю. Вслед за этим и все частные производные его по q будут равны нулю и формула (9) при $l=l_k$ принимает вид

$$\ln m_0 = \frac{E_1}{2!} \frac{d^2 \ln r}{dq^2} l_k^2 + \frac{E_2}{4!} \frac{d^4 \ln r}{dq^4} l_k^4 + \frac{E_3}{6!} \frac{d^6 \ln r}{dq^6} l_k^6 + \ldots. \quad (10)$$

При $l_k=3°=0{,}05235\ 9877\ 988$ коэффициенты при производных принимают следующие значения:

$$\frac{E_1}{2!} l_k^2 = 0{,}00137\ \ 07783\ \ 8904; \quad \frac{E_2}{4!} l_k^4 = 0{,}00000\ \ 15658\ \ 6116;$$
$$\frac{E_3}{6!} l_k^6 = 0{,}00000\ \ 00017\ \ 4578; \quad \frac{E_4}{8!} l_k^8 = 0{,}00000\ \ 00000\ \ 0194. \quad (11)$$

Производные четных порядков от $\ln r$ по q выражаются так:

$$\frac{d^2 \ln r}{dq^2} = -\cos^2 B\,(2,\ 1);$$

$$\frac{d^4 \ln r}{dq^4} = 2 \cos^2 B\,[\cos^2 B\,(4,\ 1) - \sin^2 B\,(4,\ 2)];$$

$$\frac{d^6 \ln r}{dq^6} = -8 \cos^2 B\,[\cos^4 B\,(6,1) - \sin^2 B \cos^2 B\,(6,2) + \sin^4 B\,(6,3)];$$

$$\frac{d^8 \ln r}{dq^8} 16 \cos^2 B [\cos^6 B (8,1) - \sin^2 B \cos^4 B (8,2) +$$

$$+ \sin^4 B \cos^2 B (8,3) - \sin^6 B (8,4)]. \qquad (12)$$

Здесь в круглых скобках обозначены следующие величины:

$$(2,1) = 1 + \eta^2; \quad (4,1) = 1 + 4\eta^2 + 5\eta^4 + 2\eta^6;$$

$$(4,2) = 2 + 14\eta^2 + 24\eta^4 + 12\eta^6; \quad (6,1) = 2 + 17\eta^2 + 50\eta^4 + 68\eta^6;$$

$$(6,2) = 11 + 146\eta^2 + 565\eta^4 + 940\eta^6; \quad (6,3) = 2 + 62\eta^2 + 360\eta^4 + 780\eta^6;$$

$$(8,1) = 17 + 248\eta^2 + 1260\eta^4; \quad (8,2) = 180 + 3792\eta^2 + 24528\eta^4;$$

$$(8,3) = 114 + 4272\eta^2 + 38514\eta^4; \quad (8,4) = 4 + 508\eta^2 + 7728\eta^4, \qquad (13)$$

где $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$, $e'^2 = 0{,}00673\ 85254\ 1483$ (e' — второй эксцентриситет эллипсоида Красовского). Еще отметим, что в величинах (6,1), (6,2), (6,3) из-за малости отброшены члены с η^8, а в величинах (8,1), (8,2), (8,3), (8,4) — члены с η^6 и выше.

Теперь перейдем к сопоставлению искажений проекций Гаусса и Чебышева. Как обычно принято в математической картографии в качестве меры искажений конформных проекций будем пользоваться величиной $v = \ln m$, полагая при этом, что общий масштаб изображения равен единице, для которого, следовательно, $v = 0$. В проекции Гаусса в пределах всей зоны величина $v_{\text{Г}} \geqslant 0$, а в проекции Чебышева $v_{\text{Ч}} \leqslant 0$. Считая, что равные по абсолютной величине, но различные по знаку искажения равноценны, будем сравнивать абсолютные значения амплитуд величин v в пределах всей зоны той и другой проекции.

Согласно формуле (4) в проекции Гаусса имеем

$$|v_{\text{Г}}| = \left| -\frac{l_k^2}{2!} \frac{d^2 \ln r}{dq^2} + \frac{l_k^4}{4!} \frac{d^4 \ln r}{dq^4} - \frac{l_k^6}{6!} \frac{d^6 \ln r}{dq^6} + \ldots \right| \qquad (14)$$

и согласно формуле (10) в проекции Чебышева имеем

$$|v_{\text{Ч}}| = \left| \frac{l_k^2}{2!} \frac{d^2 \ln r}{dq^2} + \frac{5\, l_k^4}{4!} \frac{d^4 \ln r}{dq^4} + \frac{61\, l_k^6}{6!} \frac{d^6 \ln r}{dq^6} \ldots \right|. \qquad (15)$$

Сравнивая эти выражения, видим, что они отличаются между собой только членами четвертой и выше степеней относительно разности долгот l_k. Поэтому, принимая во внимание, что $\frac{d^2 \ln r}{dq^2} < 0$ и $\frac{d^4 \ln r}{dq^4} > 0$, с точностью до членов четвертой степени получим

$$v_{\text{Г}} - |v_{\text{Ч}}| \approx \frac{l_k^4}{4} \frac{d^4 \ln r}{dq^4}. \qquad (16)$$

Максимальные искажения и максимальная разность их в рассматриваемых проекциях имеет место на экваторе, где $\frac{d^4 \ln r}{dq^4} \approx 2$ и при $l_k = \pm 3° = \pm 0{,}0524$, поэтому максимальное значение разности (16) в пределах шестиградусной зоны составляет примерно 0,0000038 в пользу проекции Чебышева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. М., «Недра», 1969.
2. Урмаев Н. А. Сфероидическая геодезия. М., Ред.-изд. отдел ВТС, 1955.
3. Чебышев П. Л. О построении географических карт. Полн. собр. соч. Т. 5. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1951.

Работа поступила в редколлегию 23 апреля 1976 года. Рекомендована кафедрой аэрофотогеодезии Львовского политехнического института.