УДК 528.142.512. 942

Л. В. КУДРЯВЦЕВ

ОБРАТНЫЙ ВЕС ФУНКЦИИ НЕОБХОДИМЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ, УРАВНЕННЫХ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ *

Пусть дана функция уравненных необходимых неизвестных

$$F(X_{t+1}, X_{t+2}, \ldots, X_n) \tag{1}$$

или

$$F(X^0_{t+1} - x'_{t+1}, X^0_{t+2} - x'_{t+2}, \ldots, X^0_n - x'_n), \tag{2}$$

где X^0_r $(r = t + 1, t + 2, \ldots, n)$ — приближенные значения необходимых неизвестных, а x'_r — поправки к ним; $x'_r = -x_t$ [2].

Для определения обратного веса функции (1) нельзя непосредственно применить известную из теории ошибок формулу

$$\frac{1}{P_F} = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2, \tag{3}$$

так как последняя справедлива для функций независимых между собой аргументов $X, Y, \ldots, Z$.

Представим данную функцию (1) в виде функции независимых аргументов $l_i = d_i - L_i$, имеющих те же средние квадратические ошибки, что и L_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где d_i — приближенные значения результатов измерений, а l_i — приближенные поправки в результаты измерений. Весовую функцию (1) путем разложения ее в ряд Тейлора можно привести к линейному виду

$$F = F_0 + \omega_{t+1} x'_{t+1} + \omega_{t+2} x'_{t+2} + \cdots + \omega_n x'_n, \tag{4}$$

где

$$F = F(X^0_{t+1} - x'_{t+1}, X^0_{t+2} - x'_{t+2}, \ldots, X^0_n - x'_n);$$

$$F_0 = F(X^0_{t+1}, X^0_{t+2}, \ldots, X^0_n);$$

$$\omega_{t+1} = -\left(\frac{\partial F}{\partial X_{t+1}}\right)_0, \quad \omega_{t+2} = -\left(\frac{\partial F}{\partial X_{t+2}}\right)_0, \ldots, \omega_n = -\left(\frac{\partial F}{\partial X_n}\right)_0 \tag{5}$$

частные производные весовой функции по необходимым неизвестным.

Исключим из функции (4) поправки x'_r, заменяя их независимыми величинами l_i.

Сделаем это двумя путями.

1. Прибавим к функции (4) следующие уравнения [2]:

$$\begin{aligned} a_1 x'_1 + \cdots + t_1 x'_t + u_1 x'_{t+1} + \cdots + n_1 x'_n - l_1 &= 0; \\ a_2 x'_1 + \cdots + t_2 x'_t + u_2 x'_{t+1} + \cdots + n_2 x'_n - l_2 &= 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x'_1 + \cdots + t_n x'_t + u_n x'_{t+1} + \cdots + n_n x'_n - l_n &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

* n — Число измерений, полученных ранее на основании геометрических условий [2,3].

или в векторно-матричной форме уравнение

$$K\bar{x}' - \bar{l} = \bar{\Theta}, \tag{7}$$

умноженные на не определенные пока еще коэффициенты ρ_i. Тогда получим

$$\begin{aligned} F = F_0 &+ \omega_{t+1}x'_{t+1} + \omega_{t+2}x'_{t+2} + \cdots + \omega_n x'_n + \\ &+ (a_1x'_1 + \cdots + t_1x'_t + u_1x'_{t+1} + \cdots + n_1x'_n - l_1)\rho_1 + \\ &+ (a_2x'_1 + \cdots + t_2x'_t + u_2x'_{t+1} + \cdots + n_2x'_n - l_2)\rho_2 + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (a_nx'_1 + \cdots + t_nx'_t + u_nx'_{t+1} + \cdots + n_nx'_n - l_n)\rho_n. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь K — квадратная неособенная матрица n-го порядка, столбцы которой состоят из координат n линейно независимых векторов пространства E^n; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ — неизвестные множители [2].

После раскрытия скобок и приведения подобных членов по неизвестным выражение (8) примет вид

$$\begin{aligned} F = F_0 &- (\rho_1l_1 + \rho_2l_2 + \cdots + \rho_nl_n) + \\ &+ (a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \cdots + a_n\rho_n)x'_1 + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (t_1\rho_1 + t_2\rho_2 + \cdots + t_n\rho_n)x'_t + \\ &+ (u_1\rho_1 + u_2\rho_2 + \cdots + u_n\rho_n + \omega_{t+1})x'_{t+1} + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (n_1\rho_1 + n_2\rho_2 + \cdots + n_n\rho_n + \omega_n)x'_n. \end{aligned}$$

Потребуем равенства нулю выражений в круглых скобках при неизвестных множителях $x'_1, \ldots, x'_t, x'_{t+1}, \ldots, x'_n$, то есть можно написать систему n уравнений с n неизвестными коэффициентами ρ_i

$$\left.\begin{aligned} a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \cdots + a_n\rho_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_1\rho_1 + t_2\rho_2 + \cdots + t_n\rho_n &= 0, \end{aligned}\right\} t$$
$$\left.\begin{aligned} u_1\rho_1 + u_2\rho_2 + \cdots + u_n\rho_n &= -\omega_{t+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_1\rho_1 + n_2\rho_2 + \cdots + n_n\rho_n &= -\omega_n \end{aligned}\right\} n-t \tag{9}$$

или векторно-матричное уравнение

$$K'\bar{\rho} = -\bar{\omega}_{0,n-t}, \tag{10}$$

где K' — транспонированная матрица по отношению к матрице K.

С учетом (9) выражение (8) будет иметь вид

$$F = F_0 - (\rho_1l_1 + \rho_2l_2 + \cdots + \rho_nl_n). \tag{11}$$

Теперь к функции (11) применима известная формула теории ошибок, так как аргументы l_i независимы между собой, а коэффициенты ρ_i, как видно из системы (9),— постоянные.

Найдем частные производные функции (11) по аргументам l_i

$$-\frac{\partial F}{\partial l_1} = \rho_1, \quad -\frac{\partial F}{\partial l_2} = \rho_2, \ \ldots, \ -\frac{\partial F}{\partial l_n} = \rho_n. \tag{12}$$

Тогда обратный вес функции уравненных необходимых неизвестных (1) можно определить по формуле

$$\frac{1}{P_F} = [\rho\rho]. \tag{13}$$

Обратимся к $(n-t)$ уравнениям системы (9):

$$\begin{aligned} u_1\rho_1 + u_2\rho_2 + \cdots + u_n\rho_n &= -\omega_{t+1}; \\ s_1\rho_1 + s_2\rho_2 + \cdots + s_n\rho_n &= -\omega_{t+2}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ n_1\rho_1 + n_2\rho_2 + \cdots + n_n\rho_n &= -\omega_n \end{aligned} \tag{14}$$

или

$$\Pi'\bar{\rho} = -\bar{\omega}_{n-t}, \tag{15}$$

где Π' — матрица координат базисных векторов подпространства необходимых измерений E^{n-t} размерами $(n-t)\times n$, транспонированная по отношению к матрице Π уравнений поправок.

Система (14) — неопределенная, имеет бесконечное множество решений. Требуется найти такое решение, которое удовлетворяет принципу наименьших квадратов, то есть

$$[\rho\rho] = \min, \tag{B}$$

что соответствует принципу наибольшего веса.

Системой линейных уравнений (14) определяется линейное многообразие M^t, полученное параллельным сдвигом подпространства избыточных измерений E^t на вектор $\bar{\rho}$ [4]. Любая точка $\bar{f}$ линейного многообразия M^t удовлетворяет системе (14), которую можно записать как

$$\begin{aligned} u_1f_1 + u_2f_2 + \cdots + u_nf_n &= -\omega_{t+1}, \\ s_1f_1 + s_2f_2 + \cdots + s_nf_n &= -\omega_{t+2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ n_1f_1 + n_2f_2 + \cdots + n_nf_n &= -\omega_n \end{aligned} \tag{16}$$

или

$$\Pi'\bar{f} = -\bar{\omega}_{n-t}. \tag{17}$$

Условие (B) выполняется тогда, когда вектор $\bar{\rho}$ ортогонален подпространству избыточных измерений, то есть

$$\bar{\rho} \perp E^t. \tag{18}$$

Условию (18) и отвечают первые t уравнений системы (9). Следовательно, вектор $\bar{\rho}$ принадлежит подпространству необходимых измерений

$$\bar{\rho} \in E^{n-t}. \tag{19}$$

2. Прибавим к функции (4) уравнения [2]

$$\left.\begin{aligned} u_1x'_{t+1} + s_1x'_{t+2} + \cdots + n_1x'_n - v_1 &= 0, \\ u_2x'_{t+1} + s_2x'_{t+2} + \cdots + n_2x'_n - v_2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ u_nx'_{t+1} + s_nx'_{t+2} + \cdots + n_nx'_n - v_n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

умноженные на не определенные пока еще коэффициенты $f_1, f_2, \ldots, f_n$

$$\begin{aligned} F = F_0 &+ \omega_{t+1}x'_{t+1} + \omega_{t+2}x'_{t+2} + \cdots + \omega_nx'_n + \\ &+ (u_1x'_{t+1} + s_1x'_{t+2} + \cdots + n_1x'_n - v_1)f_1 + \\ &+ (u_2x'_{t+1} + s_2x'_{t+2} + \cdots + n_2x'_n - v_2)f_2 + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (u_nx'_{t+1} + s_nx'_{t+2} + \cdots + n_nx'_n - v_n)f_n. \end{aligned} \tag{21}$$

Выражение (21) после очевидных преобразований приведем к виду

$$
\begin{aligned}
F = F_0 - (f_1 v_1 + f_2 v_2 + \cdots + f_n v_n) + \\
+ (u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_n f_n + \omega_{t+1}) x'_{t+1} + \\
+ (s_1 f_1 + s_2 f_2 + \cdots + s_n f_n + \omega_{t+2}) x'_{t+2} + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ (n_1 f_1 + n_2 f_2 + \cdots + n_n f_n + \omega_n) x'_n.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Требуя равенства нулю выражений в круглых скобках при поправках $x'_{t+1}, x'_{t+2}, \ldots, x'_n$, то есть

$$
\begin{aligned}
u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_n f_n = -\omega_{t+1}, \\
s_1 f_1 + s_2 f_2 + \cdots + s_n f_n = -\omega_{t+2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n_1 f_1 + n_2 f_2 + \cdots + n_n f_n = -\omega_n,
\end{aligned}
$$

получаем

$$F = F_0 - (f_1 v_1 + f_2 v_2 + \cdots + f_n v_n) \tag{23}$$

или в векторном виде

$$F = F_0 - (\bar{f}\bar{v}), \tag{24}$$

где $\bar{v} \in E^{n-t}$ — вектор поправок к приближенным значениям d_i результатов измерений; $\bar{f} \in E^n$ — вектор, определяемый как частное решение системы (16).

Функция (23) является функцией зависимых аргументов, так как поправки v_i получены в результате уравнивания [2].

Исключим поправки v_i из функции (23) следующим образом.

Прибавляя к функции (23) уравнения [2]

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_n v_n = 0
\end{aligned}\right\} t, \\
&\left.\begin{aligned}
u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n + w_{t+1} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n_1 v_1 + n_2 v_2 + \cdots + n_n v_n + w_n = 0
\end{aligned}\right\} n-t,
\end{aligned}
\right. \tag{25}
$$

умноженные на не определенные пока еще множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_t, \lambda_{t+1}, \ldots, \lambda_n$, после очевидных преобразований получаем

$$
\begin{aligned}
F = F_0 + \lambda_{t+1} w_{t+1} + \lambda_{t+2} w_{t+2} + \cdots + \lambda_n w_n + \\
+ (a_1 \lambda_1 + \cdots + t_1 \lambda_t + u_1 \lambda_{t+1} + \cdots + n_1 \lambda_n - f_1) v_1 + \\
+ (a_2 \lambda_1 + \cdots + t_2 \lambda_t + u_2 \lambda_{t+1} + \cdots + n_2 \lambda_n - f_2) v_2 + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ (a_n \lambda_1 + \cdots + t_n \lambda_t + u_n \lambda_{t+1} + \cdots + n_n \lambda_n - f_n) v_n.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ выберем так, чтобы выражения в круглых скобках равнялись нулю, то есть можно написать систему n линейных уравнений с n неизвестными множителями

$$
\begin{aligned}
a_1 \lambda_1 + \cdots + t_1 \lambda_t + u_1 \lambda_{t+1} + \cdots + n_1 \lambda_n = f_1, \\
a_2 \lambda_1 + \cdots + t_2 \lambda_t + u_2 \lambda_{t+1} + \cdots + n_2 \lambda_n = f_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n \lambda_1 + \cdots + t_n \lambda_t + u_n \lambda_{t+1} + \cdots + n_n \lambda_n = f_n
\end{aligned} \tag{27}
$$

или векторно-матричное уравнение

$$K\bar{\lambda} = \bar{f}. \tag{28}$$

Тогда имеем

$$F = F_0 + \lambda_{t+1} w_{t+1} + \lambda_{t+2} w_{t+2} + \cdots + \lambda_n w_n, \tag{29}$$

где [2]:

$$\begin{aligned} -w_{t+1} &= u_1 l_1 + u_2 l_2 + \cdots + u_n l_n, \\ -w_{t+2} &= s_1 l_1 + s_2 l_2 + \cdots + s_n l_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -w_n &= n_1 l_1 + n_2 l_2 + \cdots + n_n l_n. \end{aligned} \tag{30}$$

Вводя (30) в выражение (29) и группируя члены полученного выражения по аргументам l_i, получаем

$$\begin{aligned} F = F_0 &- (u_1\lambda_{t+1} + s_1\lambda_{t+2} + \cdots + n_1\lambda_n)\, l_1 - \\ &- (u_2\lambda_{t+1} + s_2\lambda_{t+2} + \cdots + n_2\lambda_n)\, l_2 - \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- (u_n\lambda_{t+1} + s_n\lambda_{t+2} + \cdots + n_n\lambda_n)\, l_n. \end{aligned} \tag{31}$$

В этом случае частные производные (12) имеют вид [1]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F}{\partial l_1} &= \rho_1 = u_1\lambda_{t+1} + s_1\lambda_{t+2} + \cdots + n_1\lambda_n, \\ -\frac{\partial F}{\partial l_n} &= \rho_2 = u_2\lambda_{t+1} + s_2\lambda_{t+2} + \cdots + n_2\lambda_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\frac{\partial F}{\partial l_n} &= \rho_n = u_n\lambda_{t+1} + s_n\lambda_{t+2} + \cdots + n_n\lambda_n \end{aligned} \tag{32}$$

или в векторно-матричной форме

$$\bar{\rho} = \Pi' \lambda_{n-t}. \tag{33}$$

В векторном виде

$$\bar{\rho} = \bar{u}\lambda_{t+1} + \bar{s}\lambda_{t+2} + \cdots + \bar{n}\lambda_n, \tag{34}$$

где $\lambda_{t+1}, \lambda_{t+2}, \ldots, \lambda_n$ — неизвестные множители, при этом [1, стр. 204]: $\lambda_{t+1} = q_1$, $\lambda_{t+2} = q_2$, ..., $\lambda_n = q_n$.

Выражение (34) показывает, что вектор $\bar{\rho}$ представляется в виде линейной комбинации базисных векторов подпространства необходимых измерений E^{n-t}, что еще раз подтверждает справедливость условия (19). Линейная комбинация $\bar{u}\lambda_{t+1} + \bar{s}\lambda_{t+2} + \cdots + \bar{n}\lambda_n$ — единственная для любого вектора $\bar{f}$, представляющего собой любое частное решение системы (14) или (16).

Определив координаты вектора $\bar{\rho}$ [3], находим обратный вес функции уравненных необходимых неизвестных по формуле (13).

Таким образом, представление функции необходимых неизвестных, уравненных в n-мерном пространстве, в виде функции результатов измерений приводит к функции, аргументами которой являются приближенные поправки l_i, а коэффициентами — элементы весового вектора $\bar{\rho}$. Приведение весовой функции к такому виду производится путем введения различных неопределенных множителей, являющихся решением систем линейных уравнений с квадратной неособенной матрицей n-го порядка.

Заметим, что из выражений (4), (11), (23) и (29) следует контрольное соотношение

$$(\bar{\omega}_{n-t}\vec{x}_{n-t}) = -(\bar{\rho}\bar{l}) = -(\bar{f}\bar{v}) = (\bar{\lambda}_{n-t}\bar{w}_{n-t}). \tag{35}$$

Вычислим уравненное значение и обратный вес функции, приведенной в примере в [2, 3].

Приближенное значение данной функции $F_0 = 95^\circ\,35'\,20{,}0''$ [2].

Приращение функции найдем по одной из формул соотношения (35)

$$\Delta F = (\bar{\omega}_{n-t}\vec{x}'_{n-t}) = -1 \cdot 0{,}1'' + (-1) \cdot 0{,}4'' + (-1) \cdot (-4{,}2'') = 3{,}7'',$$

где $\bar{\omega}_{n-t} = -\bar{\varphi}_t$ (3).

Тогда уравненное значение функции можно получить по формуле (4)

$$F = 95^\circ 35' 20{,}0'' + 3{,}7'' = 95^\circ 35' 23{,}7'',$$

что согласуется с результатом, полученным в работе [2].

Обратный вес функции определим по формуле (13):

$$\frac{1}{P_F} = 0{,}25^2 + 0{,}25^2 + 0{,}5^2 + 0^2 + 0{,}25^2 + 0{,}25^2 = 0{,}5000,$$

где $\bar{\rho} = \bar{f}_t$ [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугай П. Т. Теорія помилок і спосіб найменших квадратів, ч. I. Вид-во Львів. ун-ту, Львів, 1960.

2. Кудрявцев Л. В. Уравнивание косвенных измерений в n-мерном пространстве. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 8, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1969.

3. Кудрявцев Л. В. Оценка точности функции косвенных измерений, уравненных без составления нормальных уравнений. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 9, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1969.

4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре, изд. 3-е, «Наука», М., 1967.

Работа поступила 21 апреля 1971 года.
Рекомендована кафедрой геодезии
Харьковского института инженеров коммунального строительства.