РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 16

УДК 528.236.3

Р. Г. ПИЛИПЮК

УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ НАПРАВЛЕНИЯ ВЫХОДНОЙ СТОРОНЫ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИОННОЙ СЕТИ

В сети пространственной триангуляции, уравнивание которой предполагается выполнять условным методом, возникает ряд новых зависимостей. Одними из основных условных уравнений, которые можно составить в этом случае [2], являются условные уравнения жесткости направлений выходных сторон сети.

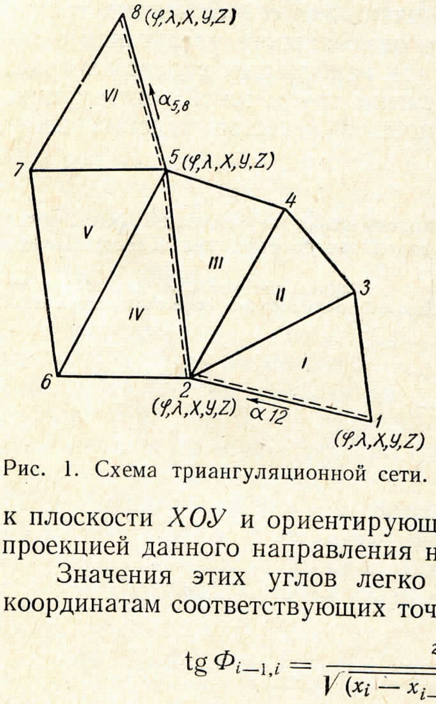

Рис. 1. Схема триангуляционной сети.

Указанные уравнения в пространственной триангуляционной сети возникают, если известны астрономические координаты φ и λ, азимут α для какого-либо пункта сети (например, точки *1* и направления *1—2*, рис. 1), а для другой или той же стороны сети известны пространственные координаты x, y, z ее вершин.

Действительно, положение в пространстве любого направления сети, если пункты ее заданы пространственными прямоугольными координатами x, y, z можно определить посредством двух параметров: угла Φ наклона направления к плоскости XOY и ориентирующим углом γ, образованным осью OX и проекцией данного направления на плоскость XOY.

Значения этих углов легко найти по известным пространственным координатам соответствующих точек из формул

$$\operatorname{tg}\Phi_{i-1,i} = \frac{z_i - z_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} = \operatorname{ctg} u_{i-1,i}, \qquad (а)$$

где $u_{i-1,i} = 90^\circ - \Phi_{i-1,i}$

и

$$\operatorname{tg}\gamma_{i-1,i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}. \qquad (б)$$

Однако эти же значения углов Φ (или u) и γ для конечного направления сети можно получить и посредством вычисления по произвольно выбранной ходовой линии, начиная от исходного направления. Формулы, по которым можно найти значения данных углов, см. в работе [1].

Указанное положение приводит к возникновению в пространственной триангуляционной сети упомянутых условных уравнений, вид которых в бщем случае может быть записан таким образом:

$$\Delta u_{i-1,i} + w_u = 0 \tag{1}$$

$$\Delta \gamma_{i-1,i} + w_\gamma = 0, \tag{2}$$

де

$$w_u = u_{i-1,i}^{\text{вычисл.}} - u_{i-1,i}^{\text{теор.}}, \quad w_\gamma = \gamma_{i-1,i}^{\text{вычисл.}} - \gamma_{i-1,i}^{\text{теор.}}.$$

Рассмотрим методику определения величин $\Delta u_{i-1,i}$ и $\Delta\gamma_{i-1,i}$ на следую-щем примере. Пусть задан участок пространственной сети (рис. 1) с изме-ренными горизонтальными углами a и зенитными расстояниями β. В пунк-тах *1*, *2* и *5*, *8* известны значения астрономических и пространственных координат φ, λ и x, y, z, а также азимуты направлений α_{1-2} и α_{5-8}. Кроме того, предположим, что система пространственных прямоугольных коор-динат X, $У$, Z размещена так, что ось OX лежит в плоскости начального

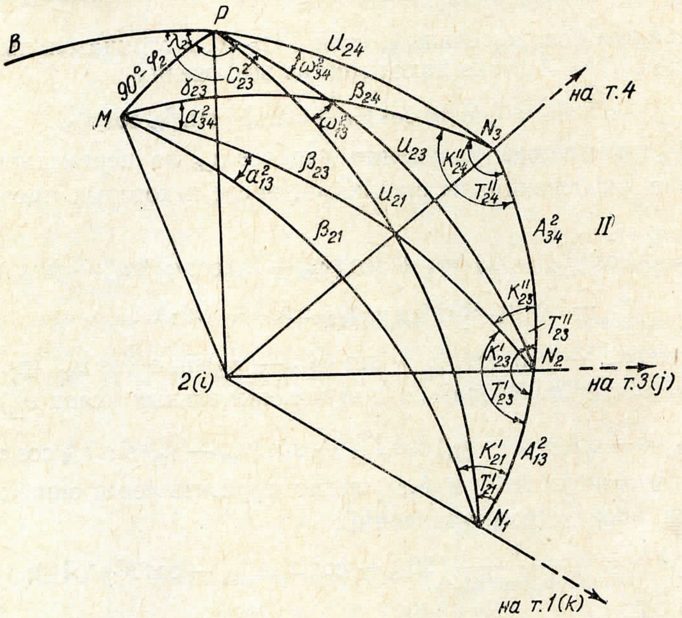

Рис. 2. К определению углов u и γ в триангуляционной сети: PBi — плоскость, параллельная плоскости исходного астрономиче-ского меридиана; A — плоские углы треугольников; u — угол между направлением сети и осью OZ; γ — ориентирующий угол направления сети; ω — углы в треугольниках на плоскости $XOУ$; K — угол между вертикальной плоскостью направления и плоскостью треугольника; T — угол между плоскостью треугольника и плоскостью, проходящей через направление сети и ось OZ.

астрономического меридиана, ось OZ — параллельна оси вращения Земли, а ось $OУ$ — размещена на 90° к востоку от оси OX. Для передачи значений u и γ от исходного направления *1—2* к конечному направлению *5—8* по кратчайшему пути выбрана ходовая линия, указанная на рис. 1 пунктиром.

Уравнения, позволяющие находить значения углов u и γ для произ-вольных направлений сети, выведенные в работе [1] из решения сферических треугольников и для произвольного треугольника сети с вершинами i, j, k и порядковым номером n, имеют вид

$$\cos u_{ij} = \cos u_{ik} \cos A_{jk}^{i} + \sin u_{ik} \sin A_{jk}^{i} \cos T_{ik}^{n}, \tag{3}$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ik} + \omega_{jk}^{i} \text{ или } \gamma_{ij} = \lambda_i + C_{ij}^{i}. \tag{4}$$

Смысл вводимых обозначений понятен из рис. 2, на котором линия iP па-раллельна оси OZ пространственной системы координат, линия iM —

направление отвесной линии в точке i; ik, ij — направления сторон сети. Точки N_1, N_2, N_3, M, P получаются в результате пересечения соответствующих направлений с поверхностью сферы единичного радиуса.

Теперь рассмотрим методику определения поправки $\Delta u_{i-1,i}$ на примере участка сети, изображенного на рис. 1. Для этого запишем уравнение вида (3) применительно к направлению *2—3* сети. Имеем

$$\cos u_{23} = \cos u_{21} \cos A_{13}^{2} + \sin u_{21} \sin A_{13}^{2} \cos T_{21}^{\mathrm{I}},$$

где $u_{21} = 180^\circ + u_{12}$ и определяется из (а) или из выражения

$$\cos u_{12} = \cos \beta_{12} \sin \varphi_1 + \sin \beta_{12} \cos \varphi_1 \cos \alpha_{12}.$$

Угол $T_{21}^{\mathrm{I}} = T_{12}^{\mathrm{I}} = K_{12}^{\mathrm{I}} + e_{12}^{\mathrm{I}}$, причем

$$\cos K_{12}^{\mathrm{I}} = \frac{\cos \beta_{13} - \cos \beta_{12} \cos A_{23}^{\mathrm{I}}}{\sin \beta_{12} \sin A_{23}^{\mathrm{I}}}, \quad a \quad \sin e_{12}^{\mathrm{I}} = \frac{\sin \alpha_{12} \cos \varphi_1}{\sin u_{12}}.$$

Угол e_{12}^{I} считается положительным, если $T > K$, и отрицательным при $K > T$. Значение угла A легко находится из выражения

$$\cos A_{jk}^{i} = \cos \beta_{ij} \cos \beta_{ik} + \sin \beta_{ij} \sin \beta_{ik} \cos a_{jk}^{i}.$$

Продифференцировав уравнение для $\cos u_{23}$ по переменным u_{21}, A_{13}^{2}, T_{21}^{I} и заменив дифференциалы ошибками, после некоторых преобразований получаем

$$\Delta u_{23} = -\cos (\gamma_{23} - \lambda_1) \Delta \varphi_1 + \sin (\gamma_{23} - \lambda_1) \cos \varphi_1 \Delta \alpha_{12} + bu_{23} \Delta \beta_{12} - \\ - \sin u_{12} \sin (\gamma_{23} - \gamma_{12}) \Delta K_{12}^{\mathrm{I}} + fu_{23}^{\mathrm{I}} \Delta A_{13}^{2}, \tag{5}$$

где $b_{u23} = \cos (\gamma_{23} - \gamma_{12}) \cos e_{12}^{\mathrm{I}} \pm \sin (\gamma_{23} - \gamma_{12}) \sin e_{12}^{\mathrm{I}} \cos u_{12}$ (причем верхним знаком следует пользоваться при положительных углах e_{12}^{I}) и

$$fu_{23}^{\mathrm{I}} = -\cos (\gamma_{23} - \gamma_{21}) \cos T_{21}^{\mathrm{I}} + \sin (\gamma_{23} - \gamma_{21}) \sin T_{21}^{\mathrm{I}} \cos u_{21}.$$

В формуле (5) ошибки $\Delta K_{12}^{\mathrm{I}}$ и ΔA_{jk}^{i} легко выразить через ошибки измеренных величин посредством уравнений:

$$\Delta K_{12}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\sin \beta_{12} \sin a_{23}^{\mathrm{I}}} (\Delta \beta_{13} - \cos a_{23}^{\mathrm{I}} \Delta \beta_{12} - \cos K_{13}^{\mathrm{I}} \Delta A_{23}^{\mathrm{I}}); \tag{6}$$

$$\Delta A_{jk}^{i} = \cos K_{ij}^{n} \Delta \beta_{ij} + \cos K_{ik}^{n} \Delta \beta_{ik} + \sin \beta_{ij} \sin K_{ij}^{n} \Delta a_{jk}^{i}. \tag{7}$$

Дифференцируя уравнение вида (3), записанное для направления *2—4*, после ряда преобразований, проведенных с учетом формулы (5), получаем

$$\Delta u_{24} = -\cos (\gamma_{24} - \lambda_1) \Delta \varphi_1 + \sin (\gamma_{24} - \lambda_1) \cos \varphi_1 \Delta \alpha_{12} + bu_{24} \Delta \beta_{12} + \\ + \sin u_{21} \sin (\gamma_{24} - \gamma_{21}) \Delta K_{12}^{\mathrm{I}} + \sin u_{23} \sin (\gamma_{24} - \gamma_{23}) \Delta D_{23} + \\ + fu_{23}^{\mathrm{I}} \Delta A_{13}^{2} + fu_{24}^{\mathrm{II}} \Delta A_{34}^{2}, \tag{8}$$

где

$$bu_{24} = \cos (\gamma_{24} - \gamma_{12}) \cos e_{12}^{\mathrm{I}} \pm \sin (\gamma_{24} - \gamma_{12}) \sin e_{12}^{\mathrm{I}} \cos u_{12},$$

$$fu_{24}^{\mathrm{I}} = -\cos (\gamma_{24} - \gamma_{21}) \cos T_{21}^{\mathrm{I}} + \sin (\gamma_{24} + \gamma_{21}) \sin T_{21}^{\mathrm{I}} \cos u_{21},$$

$$fu_{24}^{\mathrm{II}} = -\cos (\gamma_{24} - \gamma_{23}) \cos T_{23}^{\mathrm{II}} + \sin (\gamma_{24} - \gamma_{23}) \sin T_{23}^{\mathrm{II}} \cos u_{23}.$$

В формуле (8) символом ΔD_{23} обозначена ошибка двухгранного угла D_{23}, который образован плоскостями первого и второго треугольников. Поскольку угол $D_{23} = K_{23}^{\mathrm{I}} + K_{23}^{\mathrm{II}}$, то $\Delta D_{23} = \Delta K_{23}^{\mathrm{I}} + \Delta K_{23}^{\mathrm{II}}$ и определяется как сумма уравнений вида (6), записанных для данного случая.

Выполнив подобным образом дифференцирование всех последующих уравнений вида (3), записанных для направлений *2—5*, *5—6*, *5—7*, мы умеем в конечном итоге получить уравнение, выражающее ошибку угла Δu_{58}, как функцию ошибок всех участвующих в передаче измеренных элементов сети, а также ошибок исходных данных.

$$\Delta u_{58} = -\cos(\gamma_{58} - \lambda_1)\Delta\varphi_1 + \sin(\gamma_{58} - \lambda_1)\cos\varphi_1 \Delta\alpha_{12} + bu_{58}\Delta\beta_{12} + \\ + \sin u_{21}\sin(\gamma_{58} - \gamma_{21})\Delta K^{\mathrm{I}}_{12} + \sin u_{23}\sin(\gamma_{58} - \gamma_{23})\Delta D_{23} + \\ + \sin u_{24}\sin(\gamma_{58} - \gamma_{24})\Delta D_{24} - \sin u_{52}\sin(\gamma_{58} - \gamma_{52})\Delta D_{52} - \\ - \sin u_{56}\sin(\gamma_{58} - \gamma_{56})\Delta D_{56} - \sin u_{57}\sin(\gamma_{58} - \gamma_{57})\Delta D_{57} + \\ + f^{\mathrm{I}}_{u_{58}}\Delta A^2_{13} + f^{\mathrm{II}}_{u_{58}}\Delta A^2_{34} + f^{\mathrm{III}}_{u_{58}}\cdot\Delta A^2_{45} + f^{\mathrm{IV}}_{u_{58}}\cdot\Delta A^5_{26} + f^{\mathrm{V}}_{u_{58}}\Delta A^5_{67} + f^{\mathrm{VI}}_{u_{58}}\Delta A^5_{78}, \quad (9)$$

где

$$b_{u_{58}} = \cos(\gamma_{58} - \gamma_{12})\cos e'_{12} \pm \sin(\gamma_{58} - \gamma_{12})\sin e^{\mathrm{I}}_{12}\cos u_{12},$$

$$f^{\mathrm{I}}_{u_{58}} = -\cos(\gamma_{58} - \gamma_{21})\cos T^{\mathrm{I}}_{21} + \sin(\gamma_{58} - \gamma_{21})\sin T^{\mathrm{I}}_{21}\cos u_{21},$$

$$f^{\mathrm{II}}_{u_{58}} = -\cos(\gamma_{58} - \gamma_{23})\cos T^{\mathrm{II}}_{23} + \sin(\gamma_{58} - \gamma_{23})\sin T^{\mathrm{II}}_{23}\cos u_{23},$$

$$f^{\mathrm{III}}_{u_{58}} = -\cos(\gamma_{58} - \gamma_{24})\cos T^{\mathrm{III}}_{24} + \sin(\gamma_{58} - \gamma_{24})\sin T^{\mathrm{III}}_{24}\cos u_{24},$$

$$f^{\mathrm{IV}}_{u_{58}} = -\cos(\gamma_{58} - \gamma_{52})\cos T^{\mathrm{IV}}_{52} - \sin(\gamma_{58} - \gamma_{52})\sin T^{\mathrm{IV}}_{52}\cos u_{52} \text{ и т. д}$$

Уравнения, позволяющие вычислять коэффициенты при поправках ΔK и ΔD в формуле (9), имеют, как видно, ярко выраженную закономерность в построении, что дает нам возможность обозначить их произвольно выбранным символом, например l.

Закономерность в построении уравнений (5), (8), (9) очевидна, и это обстоятельство позволяет нам записать общее уравнение для вычисления Δu выходной стороны сети при любом ее виде и произвольном выборе ходовой линии

$$\Delta u_{i-1,i} = -\cos(\gamma_{i-1,i} - \lambda_1)\Delta\varphi_1 + \sin(\gamma_{i-1,i} - \lambda_1)\cos\varphi_1\Delta\alpha_{12} + b_{u_{i-1,i}}\cdot\Delta\beta_{12} + \\ + l^{\mathrm{I}}_{u_{i-1,i}}\Delta K^{\mathrm{I}}_{12} + \sum_0^{n-1} l^n_{u_{i-1,i}}\Delta D + \sum_0^n f^n_{u_{i-1,i}}\cdot\Delta A, \quad (10)$$

где индексами $i-1$, i обозначены номера вершин конечного направления сети, а $n = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\ldots$ — номера треугольников в сети. Коэффициенты формулы (10) b_u, f_u, l_u находим из следующих выражений:

$$b_{u_{i-1,i}} = \cos(\gamma_{i-1,i} - \gamma_{12})\cos e^{\mathrm{I}}_{12} \mp \sin(\gamma_{i-1,i} - \gamma_{12})\sin e^{\mathrm{I}}_{12}\cos u_{12}; \quad (11)$$

$$f^n_{u_{i-1,i}} = -\cos(\gamma_{i-1,i} - \gamma_{j,j+1})\cos T^n_{j,j+1} \pm \\ \pm \sin(\gamma_{i-1,i} - \gamma_{j,j+1})\sin T^n_{j,j+1}\cos u_{j,j+1};$$

$$l^n_{u_{i-1,i}} = \pm\sin u_{j,j+1}\sin(\gamma_{i-1,i} - \gamma_{j,j+1}).$$

С учетом изложенного, условное уравнение угла наклона выходного направления сети запишется теперь так:

$$-\cos(\gamma_{i-1,i} - \lambda_1)\Delta\varphi_1 + \sin(\gamma_{i-1,i} - \lambda_1)\cos\varphi_1\Delta\alpha_{12} + b_{u_{i-1,i}}\Delta\beta_{12} + \\ + l^{\mathrm{I}}_{u_{i-1,i}}\Delta K^{\mathrm{I}}_{12} + \sum_0^{n-1} l^n_{u_{i-1,i}}\Delta D + \sum_0^n f^n_{u_{i-1,i}}\Delta A + \omega_u = 0. \quad (12)$$

Значение ошибки $\Delta\gamma$ для конечной стороны сети вычисляется путем определения полного дифференциала функции, устанавливающей зависимость между γ и измеренными величинами, и последующего перехода от дифференциалов к ошибкам. Закономерность в построении уравнения $\Delta\gamma_{i-1,i}$

и вид его наиболее просто установить путем последовательного дифференцирования уравнений вида (4), записанных для сети, приведенной на рис. 1.

Так, ориентирующий угол γ_{23} для направления *2—3* можно получить из выражения

$$\gamma_{23} = \gamma_{21} + \omega_{13}^{2}, \tag{13}$$

где

$$\cos \omega_{13}^{2} = \frac{\cos A_{13}^{2} - \cos u_{21} \cos u_{23}}{\sin u_{21} \sin u_{23}}, \tag{в}$$

$$\gamma_{21} = \gamma_{12} \pm 180° = \lambda_1 + C_{12}^{\mathrm{I}} \pm 180°. \tag{г}$$

Формулы для определения углов ω и γ заимствованы нами из работы [1]. Дифференцируя уравнение (13) с учетом выражений (в), (г) и (5), получаем после некоторых преобразований уравнение для определения $\Delta\gamma_{23}$.

$$\Delta\gamma_{23} = \Delta\lambda_1 + \operatorname{ctg} u_{23} \sin(\gamma_{23} - \lambda_1)\,\Delta\varphi_1 + [-\sin\varphi_1 + + \operatorname{ctg} u_{23} \cos(\gamma_{23} - \lambda_1) \cos\varphi_1]\,\Delta\alpha_{12} + b_{\gamma_{23}}\Delta\beta_{12} + l_{\gamma_{23}}^{\mathrm{I}}\Delta K_{12} + f_{\gamma_{23}}^{\mathrm{I}}\Delta A_{13}^{2}, \tag{14}$$

где коэффициенты $b_{\gamma_{23}}$, $l_{\gamma_{23}}^{1}$, $f_{\gamma_{23}}^{1}$ вычисляются из выражений:

$$b_{\gamma_{23}} = \mp \sin e_{12}^{\mathrm{I}} \sin u_{12} - \operatorname{ctg} u_{23} [\sin(\gamma_{23} - \gamma_{12}) \cos e_{12}^{\mathrm{I}} \pm \pm \cos(\gamma_{23} - \gamma_{12}) \sin e_{12}^{\mathrm{I}} \cos u_{12}];$$

$$l_{\gamma_{23}}^{\mathrm{I}} = -\cos u_{21} + \operatorname{ctg} u_{23} \cos(\gamma_{23} - \gamma_{21}) \sin u_{21};$$

$$f_{\gamma_{23}}^{\mathrm{I}} = \sin T_{21}^{\mathrm{I}} \sin u_{21} - \operatorname{ctg} u_{23} [\sin(\gamma_{23} - \gamma_{21}) \cos T_{21}^{\mathrm{I}} + + \cos(\gamma_{23} - \gamma_{21}) \sin T_{21}^{\mathrm{I}} \cos u_{21}].$$

При выводе уравнения (13) мы принимали, что

$$\Delta\omega_{jk}^{i} = \frac{1}{\sin u_{ij} \sin T_{ij}^{n}} (\Delta A_{jk}^{i} - \cos T_{ij}^{n} \Delta u_{ij} - \cos T_{ik}^{n} \Delta u_{ik}); \tag{д}$$

$$\Delta C_{12}^{\mathrm{I}} = -\sin\varphi_1 \Delta\alpha_{12} \pm \cos u_{12} \Delta e_{12}^{\mathrm{I}} \mp \sin u_{12} \sin e_{12}^{\mathrm{I}} \Delta\beta_{12}; \tag{е}$$

$$\Delta e_{12}^{\mathrm{I}} = \pm \frac{1}{\sin u_{12} \sin C_{12}^{\mathrm{I}}} (\Delta\varphi_1 + \cos C_{12}^{\mathrm{I}} \Delta u_{12} + \cos \alpha_{12} \Delta\beta_{12}). \tag{ж}$$

Причем в выражениях для $b_{\gamma_{23}}$ (е), (ж) верхними знаками следует пользоваться при $K_{12}^{\mathrm{I}} > T_{12}^{\mathrm{I}}$ и нижними — при $K_{12}^{\mathrm{I}} < T_{12}^{\mathrm{I}}$.

Продолжив аналогичные действия над уравнениями γ, записанными для направлений *2—4*, *2—5*, *5—6*, *5—7* и *5—8*, мы получим, наконец, выражение для определения ошибки ориентирующего угла конечной стороны — $\Delta\gamma_{58}$.

$$\Delta\gamma_{58} = \Delta\lambda_1 + \operatorname{ctg} u_{58} \sin(\gamma_{58} - \lambda_1)\,\Delta\varphi_1 + [-\sin\varphi_1 + + \operatorname{ctg} u_{58} \cos(\gamma_{58} - \lambda_1) \cos\varphi_1]\,\Delta\alpha_{12} + b_{\gamma_{58}} \cdot \Delta\beta_{12} + l_{\gamma_{58}}^{\mathrm{I}} \Delta K_{12}^{\mathrm{I}} + l_{\gamma_{58}}^{\mathrm{II}} \Delta D_{23} + + l_{\gamma_{58}}^{\mathrm{III}} \cdot \Delta D_{24} + l_{\gamma_{58}}^{\mathrm{IV}} \Delta D_{52} + l_{\gamma_{58}}^{\mathrm{V}} \Delta D_{56} + l_{\gamma_{58}}^{\mathrm{VI}} \cdot \Delta D_{57} + f_{\gamma_{58}}^{\mathrm{I}} \Delta A_{23}^{2} + + f_{\gamma_{58}}^{\mathrm{II}} \cdot \Delta A_{34}^{2} + f_{\gamma_{58}}^{\mathrm{III}} \cdot \Delta A_{45}^{2} + f_{\gamma_{58}}^{\mathrm{IV}} \cdot \Delta A_{26}^{5} + f_{\gamma_{58}}^{\mathrm{V}} \cdot \Delta A_{67}^{5} + f_{\gamma_{58}}^{\mathrm{VI}} \cdot \Delta A_{78}^{5}, \tag{15}$$

где

$$b_{\gamma_{58}} = \mp \sin e_{12}^{\mathrm{I}} \sin u_{12} - \operatorname{ctg} u_{58} [\sin(\gamma_{58} - \gamma_{12}) \cos e_{12}^{\mathrm{I}} \pm \pm \cos(\gamma_{58} - \gamma_{12}) \sin e_{12}^{\mathrm{I}} \cos u_{12}];$$

$$f_{\gamma_{58}}^{\mathrm{I}} = \sin T_{21}^{\mathrm{I}} \sin u_{21} + \operatorname{ctg} u_{58} [\sin(\gamma_{58} - \gamma_{21}) \cos T_{21}^{\mathrm{I}} +$$

$$+\cos(\gamma_{58}-\gamma_{21})\sin T_{21}^{\mathrm{I}}\cos u_{21}];$$

$$f_{\gamma_{58}}^{\mathrm{II}}=\sin T_{23}^{\mathrm{II}}\sin u_{23}+\operatorname{ctg} u_{58}[\sin(\gamma_{58}-\gamma_{23})\cos T_{23}^{\mathrm{II}}+$$

$$+\cos(\gamma_{58}-\gamma_{23})\sin T_{23}^{\mathrm{II}}\cos u_{23}];$$

$$f_{\gamma_{58}}^{\mathrm{III}}=\sin T_{24}^{\mathrm{III}}\sin u_{24}+\operatorname{ctg} u_{58}[\sin(\gamma_{58}-\gamma_{24})\cos T_{24}^{\mathrm{III}}+$$

$$+\cos(\gamma_{58}-\gamma_{24})\sin T_{24}^{\mathrm{III}}\cos u_{24}];$$

$$f_{\gamma_{58}}^{\mathrm{IV}}=-\sin T_{52}^{\mathrm{IV}}\sin u_{52}+\operatorname{ctg} u_{58}[\sin(\lambda_{58}-\gamma_{52})\cos T_{52}^{\mathrm{IV}}-$$

$$-\cos(\gamma_{58}-\gamma_{52})\sin T_{52}^{\mathrm{IV}}\cos u_{52}];$$

. . . .

$$l_{\gamma_{58}}^{\mathrm{I}}=-\cos u_{21}+\operatorname{ctg} u_{58}\cos(\gamma_{58}-\gamma_{21})\sin u_{21};$$

$$l_{\gamma_{58}}^{\mathrm{II}}=-\cos u_{23}+\operatorname{ctg} u_{58}\cos(\gamma_{58}-\gamma_{23})\sin u_{23};$$

$$l_{\gamma_{58}}^{\mathrm{III}}=-\cos u_{24}+\operatorname{ctg} u_{58}\cos(\gamma_{58}-\gamma_{24})\sin u_{24};$$

$$l_{\gamma_{58}}^{\mathrm{IV}}=+\cos u_{52}-\operatorname{ctg} u_{58}\cos(\gamma_{58}-\gamma_{52})\sin u_{52};$$

. . . .

Закономерность, наблюдаемая при построении уравнений (14) и (15), дает нам возможность записать общее уравнение, позволяющее определять ошибку $\Delta\gamma$ при любом виде триангуляционной сети и при произвольном выборе ходовой линии.

Имеем

$$\Delta\gamma_{i-1,i}=\Delta\lambda_1+\operatorname{ctg} u_{i-1,i}\sin(\gamma_{i-1,i}-\lambda_1)\Delta\varphi_1+$$

$$+[-\sin\varphi_1+\operatorname{ctg} u_{i-1,i}\cos(\gamma_{i-1,i}-\lambda_1)\cos\varphi_1]\Delta\alpha_{12}+$$

$$+b_{\gamma_{i-1,i}}\Delta\beta_{12}+l_{\gamma_{i-1,i}}^{\mathrm{I}}\cdot\Delta K_{12}^{\mathrm{I}}+\sum_{0}^{n-1}l_{\gamma_{i-1,i}}^{n}\cdot\Delta D+\sum_{0}^{n}f_{\gamma_{i-1,i}}^{n}\cdot\Delta A. \qquad (16)$$

Коэффициенты при поправках $\Delta\beta$, ΔK, ΔD, ΔA можно вычислить по формулам, приведенным ниже:

$$b_{\gamma_{i-1,i}}=\mp\sin e_{12}^{\mathrm{I}}\sin u_{12}-\operatorname{ctg} u_{i-1,i}[\sin(\gamma_{i-1,i}-\gamma_{12})\cos e_{12}^{\mathrm{I}}\pm$$

$$\pm\cos(\gamma_{i-1,i}-\gamma_{12})\sin e_{12}^{\mathrm{I}}\cos u_{12}];$$

$$l_{\gamma_{i-1,i}}^{n}=\mp\cos u_{j,j+1}\pm\operatorname{ctg} u_{i-1,i}\cos(\gamma_{i-1,i}-\gamma_{j,j+1})\sin u_{j,j+1}; \qquad (17)$$

$$f_{\gamma_{i-1,i}}^{n}=\pm\sin T_{j,j+1}^{n}\sin u_{j,j+1}+\operatorname{ctg} u_{i-1,i}[\sin(\gamma_{i-1,i}-\gamma_{j,j+1})\cos T_{j,j+1}^{n}\pm$$

$$\pm\cos(\gamma_{i-1,i}-\gamma_{j,j+1})\sin T_{j,j+1}^{n}\cos u_{j,j+1}].$$

Теперь условное уравнение ориентирующего угла выходного направления сети запишется:

$$\Delta\lambda_1+\operatorname{ctg} u_{i-1,i}\sin(\gamma_{i,i-1}-\lambda_1)\Delta\varphi_1+[-\sin\varphi_1+$$

$$+\operatorname{ctg} u_{i-1,i}\cos(\gamma_{i-1,i}-\lambda_1)\cos\varphi_1]\Delta\alpha_{12}+$$

$$+b_{\gamma_{i-1,i}}\Delta\beta_{12}+l_{\gamma_{i-1,i}}^{\mathrm{I}}\cdot\Delta K_{12}^{\mathrm{I}}+\sum_{0}^{n-1}l_{\gamma_{i-1,i}}^{n}\cdot\Delta D+\sum_{0}^{n}f_{\gamma_{i-1,i}}^{n}\cdot\Delta A+w\gamma=0, \qquad (18)$$

где n, как и прежде, номера треугольников в сети.

Если при уравнивании ошибки исходных данных не принимаются во внимание, то в уравнениях (12) и (18) члены, содержащие эти ошибки, обращаются в нуль.

В уравнения (12) и (18) входят ошибки ΔD всех смежных направлений двух смежных треугольников, умноженные на соответствующие коэффициенты l_u и l_γ. Если эти направления находятся справа от ходовой линии (например, *2—3*, *2—4*, ...), то при вычислении коэффициентов l_u и l_γ по формулам (11) и (17) следует пользоваться верхними знаками; если же направления находятся слева (например, *5—6*, *5—7*, ...), то пользуются нижними знаками. В случае, когда направление, по которому вычисляется поправка ΔD, совпадает с ходовой линией (например, *5—2*), при вычислении коэффициентов l_u и l_γ используются нижние знаки соответствующих формул, ибо примыкание к этому направлению от конечной стороны сети можно сделать при помощи левых углов A. Когда ошибку ΔD необходимо выразить через ошибки измеренных величин, используются измерения, относящиеся к тому концу рассматриваемого направления, который совпадает с вершинами ходовой линии. Если же оба конца рассматриваемого направления совпадают с вершинами ходовой линии (например, *2—5*), то ошибку ΔD вычисляют по измерениям, относящимся к вершине *5*, то есть к той вершине, которая находится ближе всего к конечной стороне сети.

Ошибки ΔA в уравнениях (12) и (18) умножаются на соответствующие коэффициенты f_u или f_γ. Количество членов с ошибками ΔA будет равно числу углов A, примыкающих к ходовой линии. Причем, если в процессе вычисления $\Delta u_{i-1,i}$ или $\Delta \gamma_{i-1,i}$ в уравнения должны входить два угла A, относящиеся к одному и тому же треугольнику, то ошибки этих углов следует умножать на один и тот же коэффициент f_u или f_γ, вычисленный по данным этого же треугольника. Верхние знаки при вычислении коэффициента f_u по формуле (11) и f_γ по формуле (17) используются в том случае, когда треугольник, по данным которого производится вычисление этих коэффициентов, лежит справа от ходовой линии. В противном случае используются нижние знаки.

При вычислении коэффициентов $b_{u_{i-1,i}}$ и $b_{\gamma_{i-1,i}}$ по формулам (11) и (17) верхние знаки принимаются в случае, когда для исходной стороны сети (1—2) угол $K_{12}^{\mathrm{I}} > T_{12}^{\mathrm{I}}$.

Углы γ, u, T, e_{12}^{I}, которые входят в формулы (11) и (17), предварительно находят из соответствующих выражений, приведенных в работе [1]. Однако для получения правильных значений соответствующих коэффициентов следует помнить, что под $\gamma_{i-1,i}$ подразумевается ориентирующий угол конечной стороны сети, а символом $\gamma_{i,j+1}$ обозначен ориентирующий угол той стороны отдельно взятого треугольника n, которая в данном треугольнике находится ближе всего к начальной (исходной) стороне сети или совпадает с ней. Кроме того, вершина j этой стороны должна совпадать с вершиной ходовой линии. При вычислении коэффициентов l и f по данным первого треугольника значение ориентирующего угла $\gamma_{i,j+1}$ должно приниматься равным γ_{21}.

Значения углов u и T вычисляются для тех же сторон треугольников, что и углы $\gamma_{i,j+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилипюк Р. Г. К вопросу о передаче координат в сети пространственной триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 11, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1970.

2. Филлипов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 7, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1968.

Работа поступила 3 мая 1971 года.
Рекомендована кафедрой газонефтепромысловой геологии Ивано-Франковского института нефти и газа.