УДК 528.1

А. Е. ФИЛИППОВ

ОБ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ШИРОТ, ДОЛГОТ И АЗИМУТОВ

В работе [2] получены в общем виде условные уравнения астрономических широт, долгот и азимутов, возникающие в сети пространственной триангуляции с избыточными астрономическими данными. Мы рассматриваем частный вид этих уравнений, когда два смежных пункта триангуляции являются пунктами Лапласа.

Пусть в треугольнике $P_1P_2P_3$ с измеренными горизонтальными углами a_1, a_2, a_3 и взаимными зенитными расстояниями z_{12}, z_{21}, z_{13}, z_{31}, z_{23}, z_{32} выполнены в пунктах P_1 и P_2 астрономические определения широт, долгот и азимутов φ_1, φ_2, λ_1, λ_2, α_{12}, α_{21}. Тогда условные уравнения астрономической широты, долготы и азимута, в соответствии с обозначениями в работе [2], примут вид

$$\cos(\lambda_2-\lambda_1)\,\delta\varphi_1-\delta\varphi_2-\cos\varphi_1\sin(\lambda_2-\lambda_1)\,\delta\alpha_{12}+(-\cos\alpha_{21}\mp Aa')\,\delta z_{12}+$$
$$+(-\cos\alpha_{21}\pm Aa'')\,\delta z_{21}\pm Ab'\delta z_{13}\mp Ab''\delta z_{23}\pm Ac'\delta a_1\mp Ac''\delta a_2+$$
$$+(\varphi_2'-\varphi_2)=0; \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2\sin(\lambda_2-\lambda_1)\,\delta\varphi_1+\delta\lambda_1+[\operatorname{tg}\varphi_2\cos\varphi_1\cos(\lambda_2-\lambda_1)-\sin\varphi_1]\,\delta\alpha_{12}-$$
$$-\delta\lambda_2+(-\sin\alpha_{21}\sec\varphi_2\pm Ba')\,\delta z_{12}+(-\sin\alpha_{21}\sec\varphi_2\mp Ba'')\,\delta z_{21}\mp$$
$$\mp Bb'\delta z_{13}\pm Bb''\delta z_{23}\mp Bc'\delta a_1\pm Bc''\delta a_2+(\lambda_2'-\lambda_2)=0; \qquad (2)$$

$$\sec\varphi_2\sin(\lambda_2-\lambda_1)\,\delta\varphi_1+\cos\varphi_1\sec\varphi_2\cos(\lambda_2-\lambda_1)\,\delta\alpha_{12}-\delta\alpha_{21}+$$
$$+(-\sin\alpha_{21}\operatorname{tg}\varphi_2\pm Ca')\,\delta z_{12}+(-\sin\alpha_{21}\operatorname{tg}\varphi_2\mp Ca'')\,\delta z_{21}\mp$$
$$\mp Cb'\delta z_{13}\pm Cb''\delta z_{23}\mp Cc'\delta a_1\pm Cc''\delta a_2\pm(\alpha_{21}'-\alpha_{21})=0. \qquad (3)$$

В этих уравнениях величины φ_2', λ_2', α_{21}' есть вычисленные передачей по стороне P_1P_2 с использованием измеренных элементов треугольника астрономические координаты и азимут в пункте P_2. Верхний знак следует брать в том случае, когда треугольник располагается справа от направления с пункта P_1 на пункт P_2.

При выводе выражений для коэффициентов при поправках δz_{ij}, δa_i сделано допущение, что угол γ между взаимными вертикальными плоскостями по линии P_1P_2 равен нулю. Погрешность, соответствующая этому допущению, пренебрегаема в триангуляции с обычными длинами сторон. Уравнениям (1), (2), (3) равносильна следующая система:

$$\cos(\Lambda_{12}-\lambda_1)\,\delta\varphi_1-\cos\varphi_1\sin(\Lambda_{12}-\lambda_1)\,\delta\alpha_{12}-\cos Q_1\delta z_{12}-$$
$$-\cos(\Lambda_{12}-\lambda_2)\,\delta\varphi_2+\cos\varphi_2\sin(\Lambda_{12}-\lambda_2)\,\delta\alpha_{21}-\cos Q_2\delta z_{21}+$$
$$+(\Phi_{12})_1-(\Phi_{12})_2=0; \qquad (4)$$

$$\sin\Phi_{12}\sin(\Lambda_{12}-\lambda_1)\,\delta\varphi_1+\cos\Phi_{12}\delta\lambda_1-\sin z_{12}\cos Q_1\delta\alpha_{12}+$$

$$+ \sin Q_1 \delta z_{12} - \sin \Phi_{12} \sin (\Lambda_{12} - \lambda_2) \delta\varphi_2 - \cos \Phi_{12} \delta\lambda_2 + \sin z_{21} \cos Q_2 \delta\alpha_{21} + \\ + \sin Q_2 \delta z_{21} + [(\Lambda_{12})_1 - (\Lambda_{12})_2] \cos \Phi_{12} = 0; \tag{5}$$

$$\sin \alpha_{12} \sin z_{12} \delta\varphi_1 + \sin \alpha_{21} \sin z_{21} \delta\varphi_2 + \cos z_{12} \delta\alpha_{12} + \cos z_{21} \delta\alpha_{21} - \\ - (\sin \varphi_1 \cos z_{12} + \cos \varphi_1 \cos \alpha_{12} \sin z_{12}) \delta\lambda_1 - (\sin \varphi_2 \cos z_{21} + \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} \times \\ \times \sin z_{21}) \delta\lambda_2 \pm a' \delta z_{12} \mp a'' \delta z_{21} \mp b' \delta z_{13} \pm b'' \delta z_{23} \mp c' \delta a_1 \pm c'' \delta a_2 + \\ + [(\lambda_2' - \lambda_2)(\sin \varphi_2 \cos z_{21} + \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} \sin z_{21}) - (\varphi_2' - \varphi_2) \sin \alpha_{21} \sin z_{21} - \\ - (\alpha_{21}' - \alpha_{21}) \cos z_{21}] = 0, \tag{6}$$

где

$$\cos Q_1 = -\cos (\Lambda_{12} - \lambda_1) \cos \alpha_{12} + \sin \varphi_1 \sin (\Lambda_{12} - \lambda_1) \sin \alpha_{12};$$
$$\sin Q_1 = \sec \Phi_{12} \cos \varphi_1 \sin \alpha_{12};$$
$$\cos Q_2 = \cos (\Lambda_{12} - \lambda_2) \cos \alpha_{21} - \sin \varphi_2 \sin (\Lambda_{12} - \lambda_2) \sin \alpha_{21};$$
$$\sin Q_2 = -\sec \Phi_{12} \cos \varphi_2 \sin \alpha_{21}.$$

Практически $Q_1 \approx Q_2 \approx Q$, так как разность $Q_2 - Q_1$ равна углу γ. Коэффициенты при поправках в уравнениях (4), (5) — точные, коэффициенты же при поправках в уравнении (6) содержат погрешность такого же порядка, что и в уравнениях (1) — (3).

Уравнения (4), (5), (6) можно получить соответственно как суммы

$$(1)\, C + (3)\, A;$$
$$(2)\, C - (3)\, B + (4) \sec \varphi_2 \sin \Phi_{12} \sin (\Lambda_{12} - \lambda_2);$$
$$(2)(\sin \varphi_2 \cos z_{21} + \cos \varphi_2 \sin z_{21} \cos \alpha_{21}) - (1) \sin \alpha_{21} \sin z_{21} - (3) \cos z_{21}.$$

Если в рассматриваемом треугольнике из всех зенитных расстояний измерены только зенитные расстояния z_{12}, и z_{21}, то справедливы лишь два уравнения, а именно уравнения (4) и (5), выражающие условия

$$(\Phi_{12})_1 = (\Phi_{12})_2, \quad (\Lambda_{12})_1 = (\Lambda_{12})_2, \tag{7}$$

где Φ_{12}, Λ_{12} — параметры, определяющие направление P_1P_2 относительно плоскости земного экватора и плоскости начального астрономического меридиана

$$\Phi_{12} = \arcsin n_{12}; \quad \Lambda_{12} = \operatorname{arctg} \frac{m_{12}}{l_{12}}.$$

Направляющие косинусы l_{12}, m_{12}, n_{12} прямой P_1P_2 и параметры Φ_{12}, Λ_{12} определяются по астрономическим данным и зенитному расстоянию z_{12} в пункте P_1 и независимо по астрономическим данным и зенитному расстоянию z_{21} в пункте P_2. Для пункта P_1 имеем:

$$l_{12} = \cos z_{12} \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 - \sin z_{12} (\sin \lambda_1 \sin \alpha_{12} + \sin \varphi_1 \cos \lambda_1 \cos \alpha_{12});$$
$$m_{12} = \cos z_{12} \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 + \sin z_{12} (\cos \lambda_1 \sin \alpha_{12} - \sin \varphi_1 \sin \lambda_1 \cos \alpha_{12}); \tag{8}$$
$$n_{12} = \cos z_{12} \sin \varphi_1 + \sin z_{12} \cos \varphi_1 \cos \alpha_{12}.$$

Чтобы получить величины l_{12}, m_{12}, n_{12} по результатам измерений в пункте P_2 достаточно в выражениях (8) заменить φ_1, λ_1, α_{12}, z_{12} соответственно на φ_2, λ_2, $\alpha_{21} \pm 180°$, $180° - z_{21}$.

Существование условий (7) указано в работе [4].

Геометрический смысл углов Q_1, Q_2, Φ_{12}, λ_{12}, γ иллюстрирует рисунок, где p, n_1, n_2, P_2 — точки пересечения вспомогательной единичной сферы прямыми, проведенными из ее центра параллельно оси вращения Земли, отвесным линиям в пунктах P_1 и P_2 и направлению P_1P_2.

Если допустить, что астрономические данные в точках P_1 и P_2 безошибочны, а зенитные расстояния z_{12} и z_{21} искажены только влиянием вертикальной рефракции, то уравнения (4) и (5) принимают вид

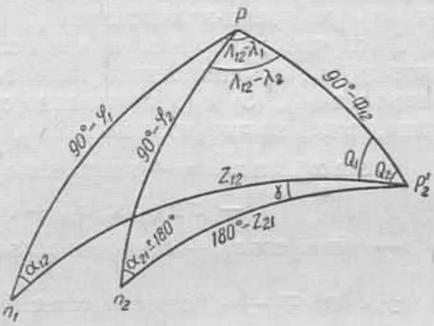
$$\cos Q_1 \Delta z_{12} + \cos Q_2 \Delta z_{21} = (\Phi_{12})_1 - (\Phi_{12})_2;$$

$$\sin Q_1 \Delta z_{12} + \sin Q_2 \Delta z_{21} = -[(\Lambda_{12})_1 - (\Lambda_{12})_2]\cos \Phi_{12}$$

и практически являются следствием уравнения

$$\Delta z_{12} + \Delta z_{21} = [(\Phi_{12})_1 - (\Phi_{12})_2]\cos Q - [(\Lambda_{12})_1 - (\Lambda_{12})_2]\cos \Phi_{12} \sin Q = \\ = 180^\circ + \psi - z_{12} - z_{21},$$

определяющего сумму $\Delta z_{12} + \Delta z_{21}$ рефракционных углов. Через ψ обозначен угол между отвесными линиями в точках P_1 и P_2.



Построения на вспомогательной сфере.

Уравнение (6) возникает, если наряду с зенитными расстояниями z_{12}, z_{21} измерены зенитные расстояния z_{13}, z_{23} и горизонтальные углы a_1 и a_2. Оно выражает условие пересечения направлений P_1P_3 и P_2P_3. Измерение зенитных расстояний z_{31} и z_{32} и горизонтального угла a_3 в пункте P_3 приводит, как известно, еще к одному условию в рассматриваемом треугольнике, а именно к условию фигуры

$$A_1 + A_2 + A_3 = 180^\circ,$$

где A_1, A_2, A_3 — плоские углы в вершинах P_1, P_2, P_3.

Образовав сумму (2) $(\sin \varphi_2 \sin z_{21} - \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} \cos z_{21})$ — (3) $\sin z_{21}$ + + (1)$\sin \alpha_{21} \cos z_{21}$, получим следующее уравнение, являющееся следствием системы (1), (2), (3) или равносильной ей системы (4), (5), (6)

$$\sin\alpha_{12}\cos z_{12}\delta\varphi_1 - \sin\alpha_{21}\cos z_{21}\delta\varphi_2 + (\sin\varphi_2\sin z_{21} - \cos\varphi_2\cos\alpha_{21}\cos z_{21})\,\delta\lambda_1 - \\ - (\sin\varphi_2\sin z_{21} - \cos\varphi_2\cos\alpha_{21}\cos z_{21})\,\delta\lambda_2 - \sin z_{12}\delta\alpha_{12} + \sin z_{21}\delta\alpha_{21} + \\ + [(\varphi_2' - \varphi_2)\sin\alpha_{21}\cos z_{21} + (\lambda_2' - \lambda_2)(\sin\varphi_2\sin z_{21} - \cos\varphi_2\cos\alpha_{21}\cos z_{21}) - \\ - (\alpha_{21}' - \alpha_{21})\sin z_{21}] = 0. \qquad (9)$$

Как видим, значение свободного члена уравнения (9) практически не зависит от ошибок зенитных расстояний и горизонтальных углов, хотя эти ошибки заметно влияют на каждую из разностей $(\varphi_2' - \varphi_2)$, $(\lambda_2' - \lambda_2)$, $(\alpha_{21}' - \alpha_{21})$ в отдельности. При $z_{21} \approx 90^\circ$ это уравнение с достаточной точностью можно записать так:

$$\delta\alpha_{21} - \sin\varphi_2\delta\lambda_2 - \delta\alpha_{12} + \sin\varphi_2\delta\lambda_1 + [(\lambda_2' - \lambda_2)\sin\varphi_2 - (\alpha_{21}' - \alpha_{21})] = 0$$

или

$$\delta\alpha_{21} - \sin\varphi_2\delta\lambda_2 - \delta\alpha_{12} + \sin\varphi_2\delta\lambda_1 + \{[(\alpha_{21} \pm 180^\circ - \alpha_{12}) - \Delta\alpha] - \\ - [(\lambda_2 - \lambda_1) - \Delta\lambda]\sin\varphi_2\} = 0, \qquad (10)$$

где $\Delta\alpha = \alpha_{21}' \pm 180^\circ - \alpha_{12}$, $\Delta\lambda = \lambda_2' - \lambda_1$.

Уравнение (10) является аналогом известного азимутального условного уравнения, которое решается при уравнивании астрономических азимутов и долгот на концах выходных сторон триангуляции первого класса [1]

$$\delta\alpha_{21} - \sin\varphi_2\delta\lambda_2 - \delta\alpha_{12} + \sin\varphi_2\delta\lambda_1 + \{[(\alpha_{21} \pm 180^\circ - \alpha_{12}) - \delta_{12}] - \\ - [(\lambda_2 - \lambda_1) - l_{12}]\sin\varphi_2\} = 0.$$

В последнем уравнении разности δ_{12}, l_{12} геодезических азимутов и геодезических долгот по выходной стороне P_1P_2 вычисляются по длине s_{12}

этой стороны и величинам $B_1 = \varphi_1$, $L_1 = \lambda_1$, $A_{12} = \alpha_{12}$, в то время как в уравнении (10) величины $\Delta\alpha$ и $\Delta\lambda$ есть разности астрономических азимутов и астрономических долгот по той же стороне, вычисленные по величинам φ_1 λ_1, α_{12}, a_1, a_2, z_{12}, z_{21}, z_{13}, z_{23}. При условии $z_{21} \approx 90^\circ$ должно быть

$$\delta_{12} - l_{12} \sin\varphi_2 \approx \Delta\alpha - \Delta\lambda \sin\varphi_2,$$

так что при наличии в треугольнике $P_1P_2P_3$ измеренных и исправленных за рефракцию зенитных расстояний и горизонтальных углов в вершинах P_1 и P_2 уравнивание астрономических азимутов и долгот на концах стороны P_1P_2 можно выполнить, не прибегая к решению прямой геодезической задачи на референц-эллипсоиде.

В случае измерения в треугольнике $P_1P_2P_3$ вместо горизонтальных углов a_1, a_2, a_3 наклонных дальностей $P_1P_2 = s_{12}$, $P_1P_3 = s_{13}$, $P_2P_3 = s_{23}$ уравнения (4), (5) и (9) не изменят своего вида, а в уравнении (6) появятся члены, содержащие поправки δs_{12}, δs_{23}, δs_{13} длин сторон

$$\sin\alpha_{12}\sin z_{12}\delta\varphi_1 + \sin\alpha_{21}\sin z_{21}\delta\varphi_2 + \cos z_{12}\delta\alpha_{12} + \cos z_{21}\delta\alpha_{21} -$$
$$-(\sin\varphi_1\cos z_{12} + \cos\varphi_1\cos\alpha_{12}\sin z_{12})\,\delta\lambda_1 -$$
$$-(\sin\varphi_2\cos z_{21} + \cos\varphi_2\cos\alpha_{21}\sin z_{21})\delta\lambda_2 \pm d'\delta z_{12} \mp d''\delta z_{21} \mp e'\delta z_{13} \pm$$
$$\pm e''\delta z_{23} \mp \frac{\rho''}{s_{12}} f' \operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} A_2 \delta s_{23} \pm \frac{\rho''}{s_{12}} f'' \operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} A_2 \delta s_{13} \mp$$
$$\mp \frac{\rho''}{s_{12}} f''' \operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} A_2 \delta s_{12} + [(\lambda_2' - \lambda_2)(\sin\varphi_2\cos z_{21} +$$
$$+\cos\varphi_2\cos\alpha_{21}\sin z_{21}) - (\varphi_2' - \varphi_2)\sin\alpha_{21}\sin z_{21} - (\alpha_{21}' - \alpha_{21})\cos z_{21}] = 0.$$

Выражения для величин d', d'', e', e'', f', f'', f''' приведены в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Ф. Н. Избранные сочинения, т. 4., стр. 504. Геодезиздат, М., 1955.
2. Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 6. Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1967.
3. Филиппов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной трилатерации. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 9. Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1969.
4. Rinner K. Study on the Determination of the European Base for the PAGEOS World Network. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, B, N 143, 1967.

Работа поступила 10 мая 1971 года.
Рекомендована кафедрой высшей геодезии и гравиметрии Львовского политехнического института.