

УДК 528.1

А. Е. ФИЛИПОВ

ОБ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ШИРОТ, ДОЛГОТ И АЗИМУТОВ

В работе [2] получены в общем виде условные уравнения астрономических широт, долгот и азимутов, возникающие в сети пространственной триангуляции с избыточными астрономическими данными. Мы рассматриваем частный вид этих уравнений, когда два смежных пункта триангуляции являются пунктами Лапласа.

Пусть в треугольнике $P_1P_2P_3$ с измеренными горизонтальными углами a_1, a_2, a_3 и взаимными зенитными расстояниями $z_{12}, z_{21}, z_{13}, z_{31}, z_{23}, z_{32}$ выполнены в пунктах P_1 и P_2 астрономические определения широт, долгот и азимутов $\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, \alpha_{12}, \alpha_{21}$. Тогда условные уравнения астрономической широты, долготы и азимута, в соответствии с обозначениями в работе [2], примут вид

$$\begin{aligned} \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \delta\varphi_1 - \delta\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \delta\alpha_{12} + (-\cos\alpha_{21} \mp Aa') \delta z_{12} + \\ + (-\cos\alpha_{21} \pm Aa'') \delta z_{21} \pm Ab' \delta z_{13} \mp Ab'' \delta z_{23} \pm Ac' \delta a_1 \mp Ac'' \delta a_2 + \\ + (\varphi_2 - \varphi_1) = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \delta\varphi_1 + \delta\lambda_1 + [\operatorname{tg}\varphi_2 \cos\varphi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) - \sin\varphi_1] \delta\alpha_{12} - \\ - \delta\lambda_2 + (-\sin\alpha_{21} \sec\varphi_2 \pm Ba') \delta z_{12} + (-\sin\alpha_{21} \sec\varphi_2 \mp Ba'') \delta z_{21} \mp \\ \mp Bb' \delta z_{13} \pm Bb'' \delta z_{23} \mp Bc' \delta a_1 \pm Bc'' \delta a_2 + (\lambda'_2 - \lambda_2) = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sec\varphi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \delta\varphi_1 + \cos\varphi_1 \sec\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \delta\alpha_{12} - \delta\alpha_{21} + \\ + (-\sin\alpha_{21} \operatorname{tg}\varphi_2 \pm Ca') \delta z_{12} + (-\sin\alpha_{21} \operatorname{tg}\varphi_2 \mp Ca'') \delta z_{21} \mp \\ \mp Cb' \delta z_{13} \pm Cb'' \delta z_{23} \mp Cc' \delta a_1 \pm Cc'' \delta a_2 \pm (\alpha'_{21} - \alpha_{21}) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В этих уравнениях величины $\varphi'_2, \lambda'_2, \alpha'_{21}$ есть вычисленные передачей по стороне P_1P_2 с использованием измеренных элементов треугольника астрономические координаты и азимут в пункте P_2 . Верхний знак следует брать в том случае, когда треугольник располагается справа от направления с пункта P_1 на пункт P_2 .

При выводе выражений для коэффициентов при поправках $\delta z_{ij}, \delta a_i$ сделано допущение, что угол γ между взаимными вертикальными плоскостями по линии P_1P_2 равен нулю. Погрешность, соответствующая этому допущению, пренебрегаема в триангуляции с обычными длинами сторон. Уравнениям (1), (2), (3) равносильна следующая система:

$$\begin{aligned} \cos(\Lambda_{12} - \lambda_1) \delta\varphi_1 - \cos\varphi_1 \sin(\Lambda_{12} - \lambda_1) \delta\alpha_{12} - \cos Q_1 \delta z_{12} - \\ - \cos(\Lambda_{12} - \lambda_2) \delta\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin(\Lambda_{12} - \lambda_2) \delta\alpha_{21} - \cos Q_2 \delta z_{21} + \\ + (\Phi_{12/1} - (\Phi_{12/2}) = 0; \\ \sin\Phi_{12} \sin(\Lambda_{12} - \lambda_1) \delta\varphi_1 + \cos\Phi_{12} \delta\lambda_1 - \sin z_{12} \cos Q_1 \delta\alpha_{12} + \end{aligned} \quad (4)$$

$$+ \sin Q_1 \delta z_{12} - \sin \Phi_{12} \sin (\Lambda_{12} - \lambda_2) \delta \varphi_2 - \cos \Phi_{12} \delta \lambda_2 + \sin z_{21} \cos Q_2 \delta \alpha_{21} + \\ + \sin Q_2 \delta z_{21} + [(\Lambda_{12})_1 - (\Lambda_{12})_2] \cos \Phi_{12} = 0; \quad (5)$$

$$\sin \alpha_{12} \sin z_{12} \delta \varphi_1 + \sin \alpha_{21} \sin z_{21} \delta \varphi_2 + \cos z_{12} \delta \alpha_{12} + \cos z_{21} \delta \alpha_{21} - \\ - (\sin \varphi_1 \cos z_{12} + \cos \varphi_1 \cos \alpha_{12} \sin z_{12}) \delta \lambda_1 - (\sin \varphi_2 \cos z_{21} + \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} \times \\ \times \sin z_{21}) \delta \lambda_2 \pm a' \delta z_{12} \mp a'' \delta z_{21} \mp b' \delta z_{13} \pm b'' \delta z_{23} \mp c' \delta a_1 \pm c'' \delta a_2 + \\ + [(\lambda'_2 - \lambda_2) (\sin \varphi_2 \cos z_{21} + \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} \sin z_{21}) - (\varphi'_2 - \varphi_2) \sin \alpha_{21} \sin z_{21} - \\ - (\alpha'_{21} - \alpha_{21}) \cos z_{21}] = 0, \quad (6)$$

где

$$\cos Q_1 = -\cos (\Lambda_{12} - \lambda_1) \cos \alpha_{12} + \sin \varphi_1 \sin (\Lambda_{12} - \lambda_1) \sin \alpha_{12};$$

$$\sin Q_1 = \sec \Phi_{12} \cos \varphi_1 \sin \alpha_{12};$$

$$\cos Q_2 = \cos (\Lambda_{12} - \lambda_2) \cos \alpha_{21} - \sin \varphi_2 \sin (\Lambda_{12} - \lambda_2) \sin \alpha_{21};$$

$$\sin Q_2 = -\sec \Phi_{12} \cos \varphi_2 \sin \alpha_{21}.$$

Практически $Q_1 \approx Q_2 \approx Q$, так как разность $Q_2 - Q_1$ равна углу γ . Коэффициенты при поправках в уравнениях (4), (5) — точные, коэффициенты же при поправках в уравнении (6) содержат погрешность такого же порядка, что и в уравнениях (1) — (3).

Уравнения (4), (5), (6) можно получить соответственно как суммы

$$(1) C + (3) A;$$

$$(2) C - (3) B + (4) \sec \varphi_2 \sin \Phi_{12} \sin (\Lambda_{12} - \lambda_2);$$

$$(2) (\sin \varphi_2 \cos z_{21} + \cos \varphi_2 \sin z_{21} \cos \alpha_{21}) - (1) \sin \alpha_{21} \sin z_{21} - (3) \cos z_{21}.$$

Если в рассматриваемом треугольнике из всех зенитных расстояний измерены только зенитные расстояния z_{12} , и z_{21} , то справедливы лишь два уравнения, а именно уравнения (4) и (5), выражающие условия

$$(\Phi_{12})_1 = (\Phi_{12})_2, \quad (\Lambda_{12})_1 = (\Lambda_{12})_2, \quad (7)$$

где Φ_{12} , Λ_{12} — параметры, определяющие направление $P_1 P_2$ относительно плоскости земного экватора и плоскости начального астрономического меридиана

$$\Phi_{12} = \arcsin n_{12}; \quad \Lambda_{12} = \arctg \frac{m_{12}}{l_{12}}.$$

Направляющие косинусы l_{12} , m_{12} , n_{12} прямой $P_1 P_2$ и параметры Φ_{12} , Λ_{12} определяются по астрономическим данным и зенитному расстоянию z_{12} в пункте P_1 и независимо по астрономическим данным и зенитному расстоянию z_{21} в пункте P_2 . Для пункта P_1 имеем:

$$l_{12} = \cos z_{12} \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 - \sin z_{12} (\sin \lambda_1 \sin \alpha_{12} + \sin \varphi_1 \cos \lambda_1 \cos \alpha_{12});$$

$$m_{12} = \cos z_{12} \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 + \sin z_{12} (\cos \lambda_1 \sin \alpha_{12} - \sin \varphi_1 \sin \lambda_1 \cos \alpha_{12}); \quad (8)$$

$$n_{12} = \cos z_{12} \sin \varphi_1 + \sin z_{12} \cos \varphi_1 \cos \alpha_{12}.$$

Чтобы получить величины l_{12} , m_{12} , n_{12} по результатам измерений в пункте P_2 достаточно в выражениях (8) заменить φ_1 , λ_1 , α_{12} , z_{12} соответственно на φ_2 , λ_2 , $\alpha_{21} \pm 180^\circ$, $180^\circ - z_{21}$.

Существование условий (7) указано в работе [4].

Геометрический смысл углов Q_1 , Q_2 , Φ_{12} , λ_{12} , γ иллюстрирует рисунок, где p , n_1 , n_2 , P_2 — точки пересечения вспомогательной единичной сферы прямыми, проведенными из ее центра параллельно оси вращения Земли, отвесным линиям в пунктах P_1 и P_2 и направлению $P_1 P_2$.

Если допустить, что астрономические данные в точках P_1 и P_2 безошибочны, а зенитные расстояния z_{12} и z_{21} искажены только влиянием

тикальной рефракции, то уравнения (4) и (5) принимают вид

$$\cos Q_1 \Delta z_{12} + \cos Q_2 \Delta z_{21} = (\Phi_{12})_1 - (\Phi_{12})_2;$$

$$\sin Q_1 \Delta z_{12} + \sin Q_2 \Delta z_{21} = -[(\Lambda_{12})_1 - (\Lambda_{12})_2] \cos \Phi_{12}$$

практически являются следствием уравнения

$$\Delta z_{12} + \Delta z_{21} = [(\Phi_{12})_1 - (\Phi_{12})_2] \cos Q - [(\Lambda_{12})_1 - (\Lambda_{12})_2] \cos \Phi_{12} \sin Q = \\ = 180^\circ + \psi - z_{12} - z_{21},$$

деляющего сумму $\Delta z_{12} + \Delta z_{21}$ рефракционных углов. Через ψ обозначен л между отвесными линиями в точ-
 P_1 и P_2 .

Уравнение (6) возникает, если на-
у с зенитными расстояниями z_{12} ,
измерены зенитные расстояния z_{13} ,
и горизонтальные углы a_1 и a_2 .
о выражает условие пересечения
равлений P_1P_3 и P_2P_3 . Измерение
ятных расстояний z_{31} и z_{32} и гори-
тального угла a_3 в пункте P_3 при-
ит, как известно, еще к одному
вию в рассматриваемом треуголь-
е, а именно к условию фигуры

$$A_1 + A_2 + A_3 = 180^\circ,$$

A_1, A_2, A_3 — плоские углы в вершинах P_1, P_2, P_3 .

Образовав сумму (2) $(\sin \varphi_2 \sin z_{21} - \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} \cos z_{21}) -$ (3) $\sin z_{21} +$
1) $\sin \alpha_{21} \cos z_{21}$, получим следующее уравнение, являющееся следствием
емы (1), (2), (3) или равносильной ей системы (4), (5), (6)

$$\begin{aligned} & \lambda_{12} \cos z_{12} \delta \varphi_1 - \sin \alpha_{21} \cos z_{21} \delta \varphi_2 + (\sin \varphi_2 \sin z_{21} - \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} \cos z_{21}) \delta \lambda_1 - \\ & - (\sin \varphi_2 \sin z_{21} - \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} \cos z_{21}) \delta \lambda_2 - \sin z_{12} \delta \alpha_{12} + \sin z_{21} \delta \alpha_{21} + \\ & + (\varphi_2 - \varphi_1) \sin \alpha_{21} \cos z_{21} + (\lambda_2' - \lambda_2) (\sin \varphi_2 \sin z_{21} - \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} \cos z_{21}) - \\ & - (\alpha_{21}' - \alpha_{21}) \sin z_{21} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

видим, значение свободного члена уравнения (9) практически не зави-
от ошибок зенитных расстояний и горизонтальных углов, хотя эти ошиб-
заметно влияют на каждую из разностей $(\varphi_2' - \varphi_2)$, $(\lambda_2' - \lambda_2)$, $(\alpha_{21}' -$
 $\alpha_{21})$ в отдельности. При $z_{21} \approx 90^\circ$ это уравнение с достаточной точностью
но записать так:

$$\alpha_{21}' - \sin \varphi_2 \delta \lambda_2 - \delta \alpha_{12} + \sin \varphi_2 \delta \lambda_1 + [(\lambda_2' - \lambda_2) \sin \varphi_2 - (\alpha_{21}' - \alpha_{21})] = 0$$

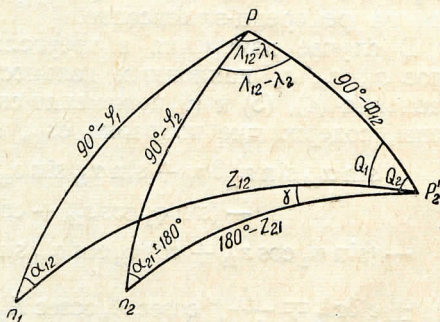
$$\begin{aligned} & \delta \alpha_{21} - \sin \varphi_2 \delta \lambda_2 - \delta \alpha_{12} + \sin \varphi_2 \delta \lambda_1 + \{[(\alpha_{21} \pm 180^\circ - \alpha_{12}) - \Delta \alpha] - \\ & - [(\lambda_2 - \lambda_1) - \Delta \lambda] \sin \varphi_2\} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Delta \alpha = \alpha_{21}' \pm 180^\circ - \alpha_{12}, \quad \Delta \lambda = \lambda_2' - \lambda_1.$$

Уравнение (10) является аналогом известного азимутального условного
нения, которое решается при уравнивании астрономических азимутов
лгот на концах выходных сторон триангуляции первого класса [1]

$$\begin{aligned} & \delta \alpha_{21} - \sin \varphi_2 \delta \lambda_2 - \delta \alpha_{12} + \sin \varphi_2 \delta \lambda_1 + \{[(\alpha_{21} \pm 180^\circ - \alpha_{12}) - \delta_{12}] - \\ & - [(\lambda_2 - \lambda_1) - l_{12}] \sin \varphi_2\} = 0. \end{aligned}$$

оследнем уравнении разности δ_{12}, l_{12} геодезических азимутов и гео-
ических долгот по выходной стороне P_1P_2 вычисляются по длине s_{12}



Построения на вспомогательной сфере.

этой стороны и величинам $B_1 = \varphi_1$, $L_1 = \lambda_1$, $A_{12} = \alpha_{12}$, в то время как в уравнении (10) величины $\Delta\alpha$ и $\Delta\lambda$ есть разности астрономических азимутов и астрономических долгот по той же стороне, вычисленные по величинам φ_1 , λ_1 , α_{12} , a_1 , a_2 , z_{12} , z_{21} , z_{13} , z_{23} . При условии $z_{21} \approx 90^\circ$ должно быть

$$\delta_{12} - l_{12} \sin \varphi_2 \approx \Delta\alpha - \Delta\lambda \sin \varphi_2,$$

так что при наличии в треугольнике $P_1P_2P_3$ измеренных и исправленных за рефракцию зенитных расстояний и горизонтальных углов в вершинах P_1 и P_2 уравнивание астрономических азимутов и долгот на концах стороны P_1P_2 можно выполнить, не прибегая к решению прямой геодезической задачи на референц-эллипсоиде.

В случае измерения в треугольнике $P_1P_2P_3$ вместо горизонтальных углов a_1 , a_2 , a_3 наклонных дальностей $P_1P_2 = s_{12}$, $P_1P_3 = s_{13}$, $P_2P_3 = s_{23}$ уравнения (4), (5) и (9) не изменят своего вида, а в уравнении (6) появятся члены, содержащие поправки δs_{12} , δs_{23} , δs_{13} длин сторон

$$\begin{aligned} & \sin \alpha_{12} \sin z_{12} \delta \varphi_1 + \sin \alpha_{21} \sin z_{21} \delta \varphi_2 + \cos z_{12} \delta \alpha_{12} + \cos z_{21} \delta \alpha_{21} - \\ & - (\sin \varphi_1 \cos z_{12} + \cos \varphi_1 \cos \alpha_{12} \sin z_{12}) \delta \lambda_1 - \\ & - (\sin \varphi_2 \cos z_{21} + \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} \sin z_{21}) \delta \lambda_2 \pm d' \delta z_{12} \mp d'' \delta z_{21} \mp e' \delta z_{13} \pm \\ & \pm e'' \delta z_{23} \mp \frac{\rho''}{s_{12}} f' \operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} A_2 \delta s_{23} \pm \frac{\rho''}{s_{12}} f'' \operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} A_2 \delta s_{13} \mp \\ & \mp \frac{\rho''}{s_{12}} f''' \operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} A_2 \delta s_{12} + [(\lambda'_2 - \lambda_2) (\sin \varphi_2 \cos z_{21} + \\ & + \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} \sin z_{21}) - (\varphi'_2 - \varphi_2) \sin \alpha_{21} \sin z_{21} - (\alpha'_{21} - \alpha_{21}) \cos z_{21}] = 0. \end{aligned}$$

Выражения для величин d' , d'' , e' , e'' , f' , f'' , f''' приведены в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Ф. Н. Избранные сочинения, т. 4., стр. 504. Геодезиздат, М., 1955.
2. Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 6. Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1967.
3. Филиппов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной трилатерации. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 9. Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1969.
4. R i n n e r K. Study on the Determination of the European Base for the PAGEOS World Network. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, B, N 143, 1967.

Работа поступила 10 мая 1971 года.
Рекомендована кафедрой высшей геодезии и гравиметрии
Львовского политехнического института.