

А. Т. ДУЛЬЦЕВ

ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕДУКЦИОННОЙ ПОСТЯННОЙ h_0

Для вычисления редукционной постоянной h_0 формулы Н. К. Мигаля, определяющей отступления геоида от референц-эллипсоида [5], ранее были предложены такие уравнения [1]:

$$h_0^B = \frac{1}{Q_n^B} (\varphi_n + u_n - \bar{\varphi}_n - T_n^B),$$

$$h_0^L = \frac{1}{Q_n^L} (\lambda_n + v_n \text{sc } \varphi_n - \bar{\lambda}_n - T_n^L), \quad (1)$$

$$h_0^A = \frac{1}{Q_{nm}^A} (\alpha_{nm} + v_n \operatorname{tg} \varphi_n - \bar{\alpha}_{nm} - T_{nm}^A).$$

Верхние индексы B , L и A в (1) показывают, к какому из этих трех уравнений — широтному, долготному или азимутальному относится данная величина. Через φ_n и λ_n обозначены астрономические широта и долгота, измеренные в конечном пункте n (см. рисунок)

звена или ряда триангуляции, по материалам которого находится h_0 ; α_{nt} — астрономический азимут, измеренный в n на предыдущий пункт t ; φ_n , λ_n и α_{nt} — значения координат пункта n .

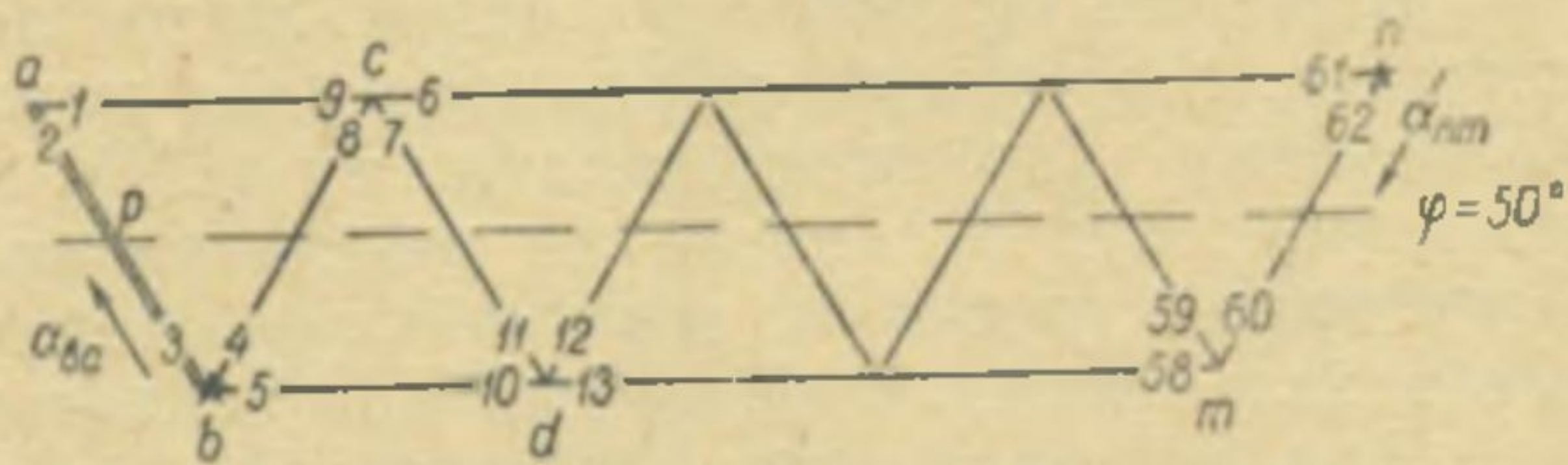


Схема звена астрономо-геодезической сети.

направления mn , полученные
ные передачей от начального пункта b по ходовой линии $bcd \dots mn$; u_n
и v_n — составляющие отклонения отвеса в пункте n соответственно в
направлении меридиана и первого вертикала, причем

$$u_n = -\xi_n - m_1 \sin 2\varphi_n - m_2 \sin 4\varphi_n; \quad (2)$$

$$v_n = -\gamma_n,$$

где m_1 и m_2 являются известными постоянными, а ξ и η — гравиметрические части составляющих уклонения отвеса, определяемые по формулам Венинг—Мейнеса.

Величины Q , фигурирующие в (1), выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} Q_n^B &= p_1^{mn} Q_m^B + p_3^{mn} \omega_{mn} + p_4^{mn} Q_{mn}^A, \\ Q_n^L &= q_1^{mn} Q_m^B + q_3^{mn} \omega_{mn} + q_4^{mn} Q_{mn}^A + Q_m^L, \\ Q_{nm}^A &= r_1^{mn} Q_m^B + r_3^{mn} \omega_{mn} + r_4^{mn} Q_{mn}^A. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом

$$Q_{mn}^A = Q_{m, m-1}^A \pm (D_{mn} - D_{m, m-1}), \quad (4)$$

p , q и r — коэффициенты дифференциальных формул первого рода, а величины ω и D для ряда триангуляции, состоящего из равноугольных треугольников (именно такой случай рассмотрен ниже) будут равны

$$\omega_{mn} = -\frac{p_{mn}}{R}, \quad (5)$$

$$D_{ik} = 1 \cdot 10^{-4} \cos^2 \varphi_k \sin 2\alpha_{ik}. \quad (6)$$

Здесь p_{mn} — сторона триангуляции между пунктами m и n ; R — радиус кривизны нормального сечения поверхности референц-эллипсоида в направлении базисной стороны, а индексы i и k обозначают определяемый и наблюдаемый пункты.

Для получения величин T уравнений (1) надо в (3) и (4) вместо Q с соответствующими значками подставить T , а вместо ω и D ввести соответственно l и L , причем

$$l_{mn} = \omega_{mn} [N_e + K(\varphi_e)], \quad (7)$$

$$L_{ik} = D_{ik} [N_k + K(\varphi_k)]. \quad (8)$$

В этих формулах N — высота геоида над референц-эллипсоидом, вычисляемая по формуле Стокса; индекс e показывает, что берутся средние для базисной стороны значения данных величин; член $K(\varphi)$ следующим образом связан с большой полуосью a референц-эллипсоида:

$$K(\varphi) = am_1 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} am_2 \sin^2 2\varphi. \quad (9)$$

В работе [3] выяснено, что из рядов астрономо-геодезической сети, направленных вдоль меридианов, h_0 может быть определено только по первому уравнению, входящему в (1). По второму уравнению можно определить h_0 только из рядов, расположенных вдоль параллели. Хотя третье уравнение и является зависимым от второго, рассмотрение его в дальнейшем необходимо при исследовании двух первых.

При составлении уравнений (1) были использованы следующие измеренные величины: астрономические координаты φ , λ , азимут α и составляющие отклонения отвеса ξ и η в начальном b и конечном n пунктах триангуляционного ряда; базисная сторона p ; направления β_i ; и высоты N_i геоида во всех пунктах. Следовательно, средняя квадратическая ошибка M_h вычисления h_0 по каждому уравнению (1) будет

$$\begin{aligned} M_h^2 &= \left(\frac{\partial h_0}{\partial \varphi_b}\right)^2 m_\varphi^2 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial \lambda_b}\right)^2 m_\lambda^2 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial \alpha_{ba}}\right)^2 m_\alpha^2 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial \varphi_n}\right)^2 m_\varphi^2 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial \lambda_n}\right)^2 m_\lambda^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial h_0}{\partial \alpha_{nm}}\right)^2 m_\alpha^2 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial \xi_b}\right)^2 m_\xi^2 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial \eta_b}\right)^2 m_\eta^2 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial \xi_n}\right)^2 m_\xi^2 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial \eta_n}\right)^2 m_\eta^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial h_0}{\partial p}\right)^2 m_p^2 + \sum \left(\frac{\partial h_0}{\partial \beta_i}\right)^2 m_\beta^2 + \sum \left(\frac{\partial h_0}{\partial N_i}\right)^2 m_{N_i}^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где средние квадратические ошибки m измеренных величин имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} m_{\varphi} &= \pm 0'',5; & m_{\xi} &= \pm 1'',5; & m_{\beta} &= \pm 0'',7, \\ m_{\lambda} &= \pm 0,5; & m_{\gamma} &= \pm 1,5; & m_N &= \pm 3 \text{ м}, \\ m_{\alpha} &= \pm 0,7; & m_p &= \pm \frac{1}{400\,000} p = \pm 0,075 \text{ м (при } p=30 \text{ км)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подсчитаем, с какой точностью можно определить h_0 из отдельного звена астрономо-геодезической сети, построенного из 15 правильных треугольников со сторонами, равными 30 км. При этом рассмотрим два случая расположения звена: вдоль параллели с широтой $\varphi=50^\circ$ и вдоль меридиана между параллелями 49° и 51° .

Коэффициенты p , q и r будем определять по известным формулам [4], в которых сделаем следующие упрощения: 1) широты всех пунктов звена примем равными $\sim 50^\circ$; 2) $\rho''/M \approx \rho''/N \approx 0,03$; 3) так как $l < 0^\circ,5$, то $\cos l \approx 1$ и $\sin l \approx 0,01$.

Тогда

$$\begin{aligned} p_1^{mn} &= 1, & q_1^{mn} &= 0,01, & r_1^{mn} &= 0,02; \\ p_3^{mn} &= -0,03 \cos A_{nm}, & q_3^{mn} &= -0,05 \sin A_{nm}, & r_3^{mn} &= -0,04 \sin A_{nm}; \\ p_4^{mn} &= -0,01, & q_4^{mn} &= -0,01 \frac{\cos A_{nm}}{\sin A_{mn}}, & r_4^{mn} &= 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Для вычисления M_h необходимо найти значения частных производных, фигурирующих в (10). Обозначив любую измеренную величину через x , из (1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_0^B}{\partial x} &= \frac{1}{Q_n^B} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial x} - \frac{\partial T_n^B}{\partial x} - h_0 \frac{\partial Q_n^B}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial h_0^L}{\partial x} &= \frac{1}{Q_n^L} \left(\frac{\partial \lambda_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \operatorname{sc} \varphi_n + v_n \operatorname{tg} \varphi_n \operatorname{sc} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial x} - \frac{\partial T_n^L}{\partial x} - h_0 \frac{\partial Q_n^L}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial h_0^A}{\partial x} &= \frac{1}{Q_{nm}^A} \left(\frac{\partial \alpha_{nm}}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \operatorname{tg} \varphi_n + v_n \operatorname{sc}^2 \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial x} - \frac{\partial T_{nm}^A}{\partial x} - h_0 \frac{\partial Q_{nm}^A}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Координаты $\bar{\varphi}_n$, $\bar{\lambda}_n$ и азимут $\bar{\alpha}_{nm}$ получены, как уже отмечалось, из решений прямых задач по ходовой линии $bcd \dots mn$. Они являются функциями только астрономических координат φ_b , λ_b и азимута α_{ba} , базисной стороны p и измеренных в звене направлений β_i . Следовательно, при $x = \xi_b, \eta_b, \varphi_n, \lambda_n, \alpha_{nm}, \xi_n, \eta_n, N_i$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial x} = 0. \quad (14)$$

Вычисление производных $\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \varphi_b}$, $\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \varphi_b}$ и $\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \varphi_b}$

Предположим, что нам известны точные значения всех измеренных величин, за исключением широты φ_b начального пункта, которую запишем следующим образом:

$$\varphi_b = \varphi'_b + d\varphi_b,$$

где $d\varphi_b$ — некоторая поправка в измеренное значение φ_b широты пункта b . Пусть координаты всех пунктов звена вычислены по широте φ_b . Тогда в координаты пунктов надо ввести поправки, определяемые дифференциальными формулами. Так, для пункта c будет

$$\begin{aligned}d\varphi_c &= p_1^{bc} d\varphi_b, \\d\lambda_c &= q_1^{bc} d\varphi_b, \\d\alpha_{cb} &= r_1^{bc} d\varphi_b,\end{aligned}\tag{15}$$

то есть

$$\frac{d\varphi_c}{d\varphi_b} = p_1^{bc}, \quad \frac{d\lambda_c}{d\varphi_b} = q_1^{bc}, \quad \frac{d\alpha_{cb}}{d\varphi_b} = r_1^{bc}.\tag{16}$$

Для пункта d имеем

$$\begin{aligned}d\varphi_d &= p_1^{cd} d\varphi_c + p_4^{cd} d\alpha_{cd}, \\d\lambda_d &= q_1^{cd} d\varphi_c + q_4^{cd} d\alpha_{cd} + d\lambda_c, \\d\alpha_{dc} &= r_1^{cd} d\varphi_c + r_4^{cd} d\alpha_{cd}.\end{aligned}\tag{17}$$

Как видно из рисунка,

$$\alpha_{cd} = \alpha_{cb} - (8-7).$$

Или

$$\alpha_{cd} = \alpha'_{cd} + d\alpha_{cd},$$

где

$$\alpha'_{cd} = \alpha'_{cb} - (8-7)$$

и

$$d\alpha_{cd} = d\alpha_{cb}.\tag{18}$$

Подставляя (18) и (15) в выражения (17), получим

$$\begin{aligned}d\varphi_d &= p_1^{cd} p_1^{bc} d\varphi_b + p_4^{cd} r_1^{bc} d\varphi_b, \\d\lambda_d &= q_1^{cd} p_1^{bc} d\varphi_b + q_4^{cd} r_1^{bc} d\varphi_b + q_1^{bc} d\varphi_b, \\d\alpha_{dc} &= r_1^{cd} p_1^{bc} d\varphi_b + r_4^{cd} r_1^{bc} d\varphi_b.\end{aligned}$$

Из этих формул, принимая во внимание (16), можем записать

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_d}{d\varphi_b} &= p_1^{cd} \frac{d\varphi_c}{d\varphi_b} + p_4^{cd} \frac{d\alpha_{cb}}{d\varphi_b}, \\ \frac{d\lambda_d}{d\varphi_b} &= q_1^{cd} \frac{d\varphi_c}{d\varphi_b} + q_4^{cd} \frac{d\alpha_{cb}}{d\varphi_b} + \frac{d\lambda_c}{d\varphi_b}, \\ \frac{d\alpha_{dc}}{d\varphi_b} &= r_1^{cd} \frac{d\varphi_c}{d\varphi_b} + r_4^{cd} \frac{d\alpha_{cb}}{d\varphi_b}.\end{aligned}\tag{19}$$

Аналогичным образом можем найти производные и для всех последующих пунктов. Переходя к принятым ранее обозначениям, для пункта n будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \varphi_b} &= P_1^{mn} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \varphi_b} + P_4^{mn} \frac{\partial \bar{\alpha}_{m,m-1}}{\partial \varphi_b}, \\ \frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \varphi_b} &= Q_1^{mn} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \varphi_b} + Q_4^{mn} \frac{\partial \bar{\alpha}_{m,m-1}}{\partial \varphi_b} + \frac{\partial \bar{\lambda}_m}{\partial \varphi_b}, \\ \frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \varphi_b} &= R_1^{mn} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \varphi_b} + R_4^{mn} \frac{\partial \bar{\alpha}_{m,m-1}}{\partial \varphi_b}.\end{aligned}\tag{20}$$

Вычисление производных $\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \lambda_b}$, $\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \lambda_b}$ и $\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \lambda_b}$

Пусть астрономическая долгота пункта b ошибочна на $d\lambda_b$. Как известно, ошибка в долготе не повлияет на вычисление широты и азимута в последующих пунктах. А долготы всех пунктов будут ошибочны на ту же величину, что и долгота начального, то есть

$$d\lambda_b = d\lambda_c = d\lambda_d = \dots = d\lambda_n.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \lambda_b} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \lambda_b} = 1; \quad \frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \lambda_b} = 0. \quad (21)$$

Вычисление производных $\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \alpha_{ba}}$, $\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \alpha_{ba}}$ и $\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \alpha_{ba}}$

Считая астрономический азимут α_{ba} начального направления ошибочным на $d\alpha_{ba}$, а остальные измеренные величины точными, и, рассуждая как при нахождении производных по широте φ_b , получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \alpha_{ba}} &= p_1^{mn} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \alpha_{ba}} + p_4^{mn} \frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial \alpha_{ba}}, \\ \frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \alpha_{ba}} &= q_1^{mn} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \alpha_{ba}} + q_4^{mn} \frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial \alpha_{ba}} + \frac{\partial \bar{\lambda}_m}{\partial \alpha_{ba}}, \\ \frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \alpha_{ba}} &= r_1^{mn} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \alpha_{ba}} + r_4^{mn} \frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial \alpha_{ba}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Вычисление производных $\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial p}$, $\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial p}$ и $\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial p}$

Предположим, что измеренная в звене базисная сторона p оказалась неточной на величину dp . Так как мы рассматриваем звено, состоящее из правильных треугольников, то значения всех сторон окажутся ошибочными тоже на величину dp . При безошибочности всех других измерений поправки к координатам пункта c будут:

$$\begin{aligned} d\varphi_c &= p_3^{bc} dp, \\ d\lambda_c &= q_3^{bc} dp, \\ d\alpha_{cb} &= r_3^{bc} dp, \end{aligned} \quad (23)$$

то есть

$$\frac{d\varphi_c}{dp} = p_3^{bc}; \quad \frac{d\lambda_c}{dp} = q_3^{bc}; \quad \frac{d\alpha_{cb}}{dp} = r_3^{bc}. \quad (24)$$

Поправки к координатам пункта d будут:

$$\begin{aligned} d\varphi_d &= p_1^{cd} d\varphi_c + p_3^{cd} dp + p_4^{cd} d\alpha_{cb}, \\ d\lambda_d &= q_1^{cd} d\varphi_c + q_3^{cd} dp + q_4^{cd} d\alpha_{cb} + d\lambda_c, \\ d\alpha_{dc} &= r_1^{cd} d\varphi_c + r_3^{cd} dp + r_4^{cd} d\alpha_{cb}, \end{aligned} \quad (25)$$

так как

$$d\alpha_{cd} = d\alpha_{cb}.$$

Из формул (25), подставляя в них (23) и учитывая (24), находим

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_d}{dp} &= p_1^{cd} \frac{d\varphi_c}{dp} + p_3^{cd} + p_4^{cd} \frac{d\alpha_{cb}}{dp}, \\ \frac{d\lambda_d}{dp} &= q_1^{cd} \frac{d\varphi_c}{dp} + q_3^{cd} + q_4^{cd} \frac{d\alpha_{cb}}{dp} + \frac{d\lambda_c}{dp}, \\ \frac{d\alpha_{dc}}{dp} &= r_1^{cd} \frac{d\varphi_c}{dp} + r_3^{cd} + r_4^{cd} \frac{d\alpha_{cb}}{dp}.\end{aligned}\quad (26)$$

Поступая так же со всеми последующими пунктами, для точки n будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial p} &= p_1^{mn} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial p} + p_3^{mn} + p_4^{mn} \frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial p}, \\ \frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial p} &= q_1^{mn} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial p} + q_3^{mn} + q_4^{mn} \frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial p} + \frac{\partial \bar{\lambda}_m}{\partial p}, \\ \frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial p} &= r_1^{mn} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial p} + r_3^{mn} + r_4^{mn} \frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial p}.\end{aligned}\quad (27)$$

Вычисление производных $\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \beta_i}$, $\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \beta_i}$ и $\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \beta_i}$

Измеренные направления оказывают влияние на вычисленные координаты двумя путями: через азимуты и через длины сторон ходовой линии. В связи с этим значения производных по направлениям разделим на две части:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \beta_i} &= \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \beta_i} \right)_1 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \beta_i} \right)_2, \\ \frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \beta_i} &= \left(\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \beta_i} \right)_1 + \left(\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \beta_i} \right)_2, \\ \frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \beta_i} &= \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \beta_i} \right)_1 + \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \beta_i} \right)_2,\end{aligned}\quad (28)$$

где подстрочным индексом 1 обозначены значения искоемых производных при условии, что ошибки в направлениях вызывают изменения только азимутов сторон ходовой линии, а индексом 2 отмечены значения производных, когда ошибки направлений вызывают изменения только длин сторон ходовой линии.

Азимуты сторон ходовой линии $bcd \dots mn$ вычисляются по направлениям $i=3, 4, 7, 8, 11, 12, \dots, 59, 60$. Следовательно, только для этих

направлений и будут существовать производные $\left(\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \beta_i} \right)_1$, $\left(\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \beta_i} \right)_1$ и $\left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \beta_i} \right)_1$. Формулы для этих производных будут иметь такой же вид, как (22):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \beta_i} \right)_1 &= p_1^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \beta_i} \right)_1 + p_4^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial \beta_i} \right)_1, \\ \left(\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \beta_i} \right)_1 &= q_1^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \beta_i} \right)_1 + q_4^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial \beta_i} \right)_1 + \left(\frac{\partial \bar{\lambda}_m}{\partial \beta_i} \right)_1, \\ \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \beta_i} \right)_1 &= r_1^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \beta_i} \right)_1 + r_4^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial \beta_i} \right)_1.\end{aligned}\quad (29)$$

Причем производные от четных направлений 4, 8, 12, ... равны по величине производным от нечетных, соответственно 3, 7, 11, ..., но противоположны по знаку.

В вычислении длин сторон ходовой линии участвуют все направления, кроме ba и mn . Для примера рассмотрим вычисление $\left(\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \beta_i}\right)_2$, $\left(\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \beta_i}\right)_2$ и $\left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \beta_i}\right)_2$ по направлению ac , то есть $i=1$.

Так как длина стороны bc равна

$$p_{bc} = p \frac{\sin(2-1)}{\sin(9-8)},$$

то

$$\frac{dp_{bc}}{d\beta_1} = -p \frac{\cos(2-1)}{\sin(9-8)}.$$

В нашем случае

$$dp_{bc} \approx -30000 \frac{0,5}{0,9} \cdot \frac{d\beta_1}{p''} \approx -0,075 d\beta_1.$$

Изменение направления ac на $d\beta_1$ окажет следующее влияние на координаты пункта c :

$$\begin{aligned} d\varphi_c &= -p_3^{bc} 0,075 d\beta_1, \\ d\lambda_c &= -q_3^{bc} 0,075 d\beta_1, \\ d\alpha_{cb} &= -r_3^{bc} 0,075 d\beta_1 \end{aligned} \quad (30)$$

и на координаты пункта d :

$$\begin{aligned} d\varphi_d &= -(p_1^{cd} p_3^{bc} + p_3^{cd} + p_4^{cd} r_3^{bc}) 0,075 d\beta_1, \\ d\lambda_d &= -(q_1^{cd} p_3^{bc} + q_3^{cd} + q_4^{cd} r_3^{bc} + q_3^{bc}) 0,075 d\beta_1, \\ d\alpha_{dc} &= -(r_1^{cd} p_3^{bc} + r_3^{cd} + r_4^{cd} r_3^{bc}) 0,075 d\beta_1. \end{aligned} \quad (31)$$

Так как на основании (30)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_c}{d\beta_1} &= -0,075 p_3^{bc}, \\ \frac{d\lambda_c}{d\beta_1} &= -0,075 q_3^{bc}, \\ \frac{d\alpha_{cb}}{d\beta_1} &= -0,075 r_3^{bc}, \end{aligned} \quad (32)$$

то из (31) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_d}{d\beta_1} &= p_1^{cd} \frac{d\varphi_c}{d\beta_1} + p_3^{cd} + p_4^{cd} \frac{d\alpha_{cb}}{d\beta_1}, \\ \frac{d\lambda_d}{d\beta_1} &= q_1^{cd} \frac{d\varphi_c}{d\beta_1} + q_3^{cd} + q_4^{cd} \frac{d\alpha_{cb}}{d\beta_1} + \frac{d\lambda_c}{d\beta_1}, \\ \frac{d\alpha_{dc}}{d\beta_1} &= r_1^{cd} \frac{d\varphi_c}{d\beta_1} + r_3^{cd} + r_4^{cd} \frac{d\alpha_{cb}}{d\beta_1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Подобным образом можем определить производные для остальных пунктов по всем направлениям. Они будут иметь такой же вид, как (27):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \beta_i}\right)_2 &= p_1^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \beta_i}\right)_2 + p_3^{mn} + p_4^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial \beta_i}\right)_2, \\ \left(\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \beta_i}\right)_2 &= q_1^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \beta_i}\right)_2 + q_3^{mn} + q_4^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial \beta_i}\right)_2 + \left(\frac{\partial \bar{\lambda}_m}{\partial \beta_i}\right)_2, \\ \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial \beta_i}\right)_2 &= r_1^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \beta_i}\right)_2 + r_3^{mn} + r_4^{mn} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_{m, m-1}}{\partial \beta_i}\right)_2.\end{aligned}\quad (34)$$

Из полученных выше формул производных $\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial \bar{\alpha}_{nm}}{\partial x}$ вытекает, что эти производные должны вычисляться последовательно по ходовой линии для всех пунктов звена, начиная от исходного.

В работе [3] были найдены значения фигурирующих в (13) производных $\frac{\partial Q_n}{\partial x}$, которые для наших целей имеют пренебрегаемые величины

$$\frac{\partial Q_n}{\partial x} = 0. \quad (35)$$

Рассмотрим производные $\frac{\partial T_n}{\partial x}$, где

$$T_n = f(\varphi_b, \lambda_b, \alpha_{ba}, p, \beta_i, \xi_b, \eta_b, N_i).$$

Для $x \neq \xi_b, \eta_b, N_i$ производные $\frac{\partial T_n}{\partial x}$ находятся подобно $\frac{\partial Q_n}{\partial x}$. При этом они имеют также пренебрегаемые для данного случая величины

$$\frac{\partial T_n}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x \neq \xi_b, \eta_b, N_i. \quad (36)$$

Дифференцируя выражения для T_n по измеренной величине N_i имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_n^B}{\partial N_i} &= p_1^{mn} \frac{\partial T_m^B}{\partial N_i} + p_3^{mn} \frac{\partial l_{mn}}{\partial N_i} + p_4^{mn} \frac{\partial T_{m, m-1}^A}{\partial N_i}, \\ \frac{\partial T_n^L}{\partial N_i} &= q_1^{mn} \frac{\partial T_m^B}{\partial N_i} + q_3^{mn} \frac{\partial l_{mn}}{\partial N_i} + q_4^{mn} \frac{\partial T_{m, m-1}^A}{\partial N_i} + \frac{\partial T_m^L}{\partial N_i}, \\ \frac{\partial T_{nm}^A}{\partial N_i} &= r_1^{mn} \frac{\partial T_m^B}{\partial N_i} + r_3^{mn} \frac{\partial l_{mn}}{\partial N_i} + r_4^{mn} \frac{\partial T_{m, m-1}^A}{\partial N_i}.\end{aligned}\quad (37)$$

Так как

$$\frac{\partial l_{mn}}{\partial \xi_b} = \frac{\partial l_{mn}}{\partial \eta_b} = 0,$$

то формулы для вычисления производных $\frac{\partial T_n}{\partial \xi_b}$ и $\frac{\partial T_n}{\partial \eta_b}$ будут

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_n^B}{\partial x} &= p_1^{mn} \frac{\partial T_m^B}{\partial x} + p_4^{mn} \frac{\partial T_{m, m-1}^A}{\partial x}, \\ \frac{\partial T_n^L}{\partial x} &= q_1^{mn} \frac{\partial T_m^B}{\partial x} + q_4^{mn} \frac{\partial T_{m, m-1}^A}{\partial x} + \frac{\partial T_m^L}{\partial x}, \\ \frac{\partial T_{nm}^A}{\partial x} &= r_1^{mn} \frac{\partial T_m^B}{\partial x} + r_4^{mn} \frac{\partial T_{m, m-1}^A}{\partial x},\end{aligned}\quad (38)$$

при $x = \xi_b, \eta_b$.

Как видно из формул (37) и (38), производные $\frac{\partial T_n}{\partial x}$ также должны

вычисляться последовательно для всех пунктов звена, начиная от пункта b . При этом, для исходного пункта имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_b^B}{\partial \xi_b} &= -1, \quad \frac{\partial T_b^L}{\partial \xi_b} = 0, \quad \frac{\partial T_{ba}^A}{\partial \xi_b} = 0, \\ \frac{\partial T_b^B}{\partial \eta_b} &= 0, \quad \frac{\partial T_b^L}{\partial \eta_b} = -\operatorname{sc} \varphi_b, \quad \frac{\partial T_{ba}^A}{\partial \eta_b} = -\operatorname{tg} \varphi_b.\end{aligned}\quad (39)$$

Значения частных производных, найденные по формулам (20), (22), (27) и (38), приведены в табл. 1. В результате вычислений, сделанных по (28), (38) и (13) было получено:

1) для отдельного звена, идущего вдоль меридиана,

$$\sum \left(\frac{\partial h_0^B}{\partial \beta_i} \right)^2 = 202\,024,68; \quad \sum \left(\frac{\partial h_0^B}{\partial N_i} \right)^2 = 0,56; \quad (40)$$

2) для отдельного звена, идущего вдоль параллели,

$$\sum \left(\frac{\partial h_0^L}{\partial \beta_i} \right)^2 = 6\,498,53; \quad \sum \left(\frac{\partial h_0^L}{\partial N_i} \right)^2 = 0,47; \quad (41)$$

3) для ряда триангуляции, расположенного вдоль параллели и состоящего из двух звеньев,

$$\sum \left(\frac{\partial h_0^L}{\partial \beta_i} \right)^2 = 14\,023,82; \quad \sum \left(\frac{\partial h_0^L}{\partial N_i} \right)^2 = 0,46; \quad (42)$$

4) для ряда триангуляции, расположенного вдоль параллели и состоящего из трех звеньев,

$$\sum \left(\frac{\partial h_0^L}{\partial \beta_i} \right)^2 = 19\,437,29; \quad \sum \left(\frac{\partial h_0^L}{\partial N_i} \right)^2 = 1,05. \quad (43)$$

Производные $\frac{\partial h_0}{\partial x}$ при $x = \varphi_n, \lambda_n, \alpha_{nm}, \xi_n, \eta_n$ легко находятся непо-

средственно из дифференцирования уравнений (1) с учетом (14), (35) и (36). Их величины даны в графах 3, 5, 7 и 9 табл. 2, в которой сделан подсчет средней квадратической ошибки M_h определения постоянной h_0 по материалам различно расположенных отдельных звеньев, а также по материалам ряда триангуляции, состоящего из различного количества звеньев.

Результаты вычислений $\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial x}$ и Q_n

Название величины	Звено вдоль меридиана	Ряд триангуляции вдоль параллели			Единица измерений
		1 звено	2 звена	3 звена	
$\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \varphi_b}$	+0,979	—	—	—	безразм.
$\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \lambda_b}$	0	—	—	—	"
$\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial a_{ba}}$	-0,149	—	—	—	"
$\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \rho}$	+0,226	—	—	—	"/м
$\frac{\partial T_n}{\partial \xi_b}$	-0,979	-0,152	+0,304	+0,420	безразм.
$\frac{\partial T_n}{\partial \tau_b}$	+0,177	-1,571	+1,510	+1,468	"
$\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \varphi_b}$	—	+0,152	+0,286	+0,430	"
$\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \lambda_b}$	—	+1	+1	+1	"
$\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial a_{ba}}$	—	+0,009	-0,042	-0,078	"
$\frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial \rho}$	—	+0,379	+0,740	+1,111	"/м
Q_n	$-1,126 \cdot 10^{-3}$	$-1,885 \cdot 10^{-3}$	$-3,688 \cdot 10^{-3}$	$-5,538 \cdot 10^{-3}$	"/м

Полученные результаты показывают, что из рядов триангуляции, идущих по параллели, редуцированная постоянная h_0 получается несколько точнее, чем из меридианальных рядов. При этом точность определения h_0 сильно зависит от длины ряда, так как с увеличением длины ряда возрастает коэффициент Q_n . Так, по материалам рядов триангуляции, состоящих из двух и трех звеньев, h_0 определяется со средними квадратическими ошибками соответственно в два и в три раза меньшими, чем из отдельного звена.

Графы 4, 6, 8, 10 табл. 2 показывают, что наименьшее влияние на h_0 имеет неточность определений высот геоида N_i в пунктах триангуляции.

Наибольшее влияние на h_0 оказывают ошибки определений составляющих уклонений отвеса, а также астрономических широт (ряд вдоль меридиана) и долгот (ряд вдоль параллели). Если принять $m_\xi = m_\eta = 0''{,}5$, то h_0 будет определяться из отдельного широтного звена с точностью $M_h = \pm 940$ м, а из долготного $M_h = \pm 700$ м.

Но даже при той точности, с которой в настоящее время выполняются измерения в астрономо-геодезических сетях, можно по уравнениям (1), по-видимому, определить h_0 с ошибкой порядка ± 20 м. Например, такая точность получается, если взять для определения постоянной h_0 сто рядов длиной 2500 км каждый (то есть каждый ряд

Вычисление M_h

Ряд триангуляции вдоль параллели, состоящий

x	m_x	Звено расположено вдоль меридиана		из 1 звена		из 2 звеньев		из 3 звеньев	
		$\frac{\partial h_0^B}{\partial x}$	$\left(\frac{\partial h_0^B}{\partial x}\right)^2 m_x^2$	$\frac{\partial h_0^L}{\partial x}$	$\left(\frac{\partial h_0^L}{\partial x}\right)^2 m_x^2$	$\frac{\partial h_0^L}{\partial x}$	$\left(\frac{\partial h_0^L}{\partial x}\right)^2 m_x^2$	$\frac{\partial h_0^L}{\partial x}$	$\left(\frac{\partial h_0^L}{\partial x}\right)^2 m_x^2$
		3	4	5	6	7	8	9	10
1	2								
φ_b	0,5	+869,50	189 006,00	+ 80,57	1 623,06	+ 77,63	1 506,61	+ 77,74	1 510,70
λ_b	0,5	0	0	+530,50	70 358,62	+271,15	18 380,54	+180,57	8 151,44
a_{ba}	0,7	-132,41	8 590,46	+ 4,95	12,00	- 11,47	64,46	- 14,16	98,20
φ_n	0,5	-888,13	197 191,99	+ 0,02	0	+ 0,01	0	+ 0,01	0
λ_n	0,5	0	0	-530,50	70 358,62	-271,15	18 380,54	-180,57	8 151,44
a_{nm}	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0
ξ_b	1,5	-869,50	1 701 057,49	- 80,57	14 605,65	- 82,29	15 237,65	- 75,79	12 922,74
η_b	1,5	+157,56	55 860,01	-833,48	1 563 038,62	-409,35	377 035,36	-264,99	157 991,22
ξ_n	1,5	-888,10	1 774 621,62	0	0	0	0	0	0
η_n	1,5	0	0	+827,59	1 541 022,70	+422,99	402 577,88	+281,69	178 535,95
p	0,075 м	+200,83	226,87	+200,96	227,17	+200,65	226,47	+200,56	226,26
	0,7	-	98 992,09	-	3 184,28	-	6 871,67	-	9 524,27
$m_B^2 \Sigma \left(\frac{\partial h_0}{\partial \beta_i} \right)^2$									
$m_N^2 \Sigma \left(\frac{\partial h_0}{\partial N_i} \right)^2$	3 м	-	5,04	-	4,23	-	4,14	-	9,45
		$M_h^2 = 4 025 551,57$	$M_h^2 = 3 264 434,95$	$M_h^2 = 840 285,32$	$M_h^2 = 377 121,67$				
		$M_h = \pm 2 006 \text{ м}$	$M_h = \pm 1 807 \text{ м}$	$M_h = \pm 917 \text{ м}$	$M_h = \pm 614 \text{ м}$				

состоит из 10 звеньев), так как из одного такого ряда h_0 можно определить с точностью, примерно, ± 200 м. Следовательно, мы пришли к такому же результату, что и Н. К. Мигаль в работе [6].

В заключение заметим, что при вычислении редукционной постоянной h_0 по уравнениям (1) можно использовать ряды триангуляции, не связанные друг с другом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дульцев А. Т. Определение редукционной постоянной h_0 . Межведомственный республиканский научно-техн. сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 2. Изд-во Львовского ун-та, 1965.
 2. Дульцев А. Т. К определению редукционной постоянной h_0 . Циркуляр Львовской астрономической обсерватории № 42. Изд-во Львовского ун-та, 1966.
 3. Дульцев А. Т. К оценке точности определения редукционной постоянной h_0 . Циркуляр Львовской астрономической обсерватории № 42. Изд-во Львовского ун-та, 1966.
 4. Красовский Ф. Н. Избранные сочинения, т. IV. Геодезиздат, М., 1955.
 5. Мигаль Н. К. Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. Научные записки Львовского политехнического института, серия геодезическая, № 1. Львов, 1949.
 6. Мигаль Н. К. Относительно точности определения редукционных постоянных, высот геоида и отклонений отвеса. Научные записки Львовского политехнического института, серия геодезическая, № 9. Львов, 1962.
-