

П. И. ЕФИМОВ

УРАВНОВЕШИВАНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИОННОГО РЯДА ПОД УСЛОВИЕМ РЕАЛЬНОГО МИНИМУМА ЕГО ДЕФОРМАЦИИ

Общепринятый способ уравнивания триангуляционного ряда при условии минимума суммы квадратов только поправок в углы (направления) и без учета ошибок измерения других его элементов (выходных сторон и дирекционных углов этих сторон) не приводит к вероятнейшим поправкам в измеренные углы, а также и к вероятнейшим значениям координат его вершин. На величины координат вершин треугольников ряда, несомненно, оказывают влияние также и ошибки измерения выходных (крайних) его сторон и определения их азимутов (дирекционных углов).

Современные высокие требования к точности положения пунктов геодезического обоснования, необходимого для производства последующих инженерно-геодезических и маркшейдерских работ, могут быть обеспечены не только увеличением точности необходимых измерений. Большим резервом в этом отношении является оптимальная комбинация количества и качества угловых и линейных измерений и азимутальных определений в данном опорном геодезическом построении, а также в установлении такого метода уравнивания, который привел бы при данной точности измерений к вероятнейшим, и притом близким к реальным, координатам его пунктов.

Термин *минимум реальной деформации триангуляционного ряда*, содержащийся в названии этой статьи, надо понимать как получение вероятнейших значений координат вершин треугольников ряда, уравнивание которого производится не под условием

$$[p_{\beta} v_{\beta}^2] = \min, \quad (1)$$

а под условием

$$[p_{\beta} v_{\beta}^2] + [p_s v_s^2] + [p_{\alpha} v_{\alpha}^2] = \min. \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2) v_{β} , v_s и v_{α} — поправки к измеренным углам, выходным сторонам и их азимутам (дирекционным углам), а p_{β} , p_s и p_{α} — соответствующие веса.

Чтобы иметь возможно полное представление о действии ошибок измерения выходных сторон ряда и определения дирекционных углов этих сторон на величины поправок в углы и на координаты вершин треугольников ряда, рассмотрим два практически применяемых варианта построения ряда: 1) ряд проложен между двумя измеренными

крайними сторонами; 2) ряд проложен между двумя измеренными крайними сторонами и определенными дирекционными углами этих сторон.

Каждый из этих двух вариантов построения ряда уравнивается по углам либо под условием (1), либо под условием $[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] = \min$, либо, наконец, при условии (2).

Ряд проложен между двумя крайними измеренными связующими сторонами и уравнивается за условия фигур и сторон.

Дадим выражения для вычисления поправок в углы через свободные члены условных уравнений, когда поправки определяются под условием (1) и, когда они находятся и в углы и в измеренные стороны, то есть уравнивание ряда производится под условием $[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] = \min$.

Вывод соответствующих формул вычисления поправок в углы при условии (1) и при игнорировании ошибок измерения выходных сторон достаточно элементарен, что позволяет написать эти формулы в таком окончательном виде:

$$(A_i) = -\frac{w_{\beta_i}}{3} - \left(\frac{1}{3} \rho_i + \delta_{A_i}\right) Q_s, \quad (3)$$

$$(B_i) = -\frac{w_{\beta_i}}{3} - \left(\frac{1}{3} \rho_i + \delta_{A_i}\right) Q_s, \quad (4)$$

$$(C_i) = -\frac{w_{\beta_i}}{3} \mp \frac{1}{3} \rho_i Q_s. \quad (5)$$

Здесь (A_i) , (B_i) и (C_i) — поправки в связующие и промежуточный угол i -го треугольника ряда, причем знак минус принимается для левых углов по ходовой линии, а знак плюс — для правых (ходовая линия идет через вершины промежуточных углов); $\rho_i = \delta_{A_i} - \delta_{B_i}$, δ_{A_i} и δ_{B_i} — изменения логарифмов синусов связующих углов в i -м треугольнике при изменении величин самих углов на $1''$ в шестом знаке логарифмов.

В формулах (3), (4) и (5) величина Q_s определяется из выражения

$$Q_s = \frac{\sum_1^n w_{\beta} \rho - 3w_s}{2 \sum_1^n R}, \quad (6)$$

где кроме обозначений, принятых ранее, n — число треугольников в ряду; w_s — свободный член условного уравнения сторон, вычисленный по измеренным и редуцированным на плоскость углам;

$$R_i = \delta_{A_i}^2 + \delta_{B_i}^2 + \delta_{A_i} \delta_{B_i};$$

$$\sum_1^n w_{\beta} \rho = w_{\beta_1} \rho_1 + w_{\beta_2} \rho_2 + \dots + w_{\beta_n} \rho_n,$$

причем w_{β_i} — угловая невязка i -го треугольника.

При выводе формул поправок в углы для случая учета ошибок измерения выходных сторон ряда и выполнения условия минимума суммы квадратов поправок в углы и измеренные стороны кроме условий фигур следует написать условие сторон.

Условное уравнение сторон может быть получено при помощи следующего выражения:

$$S_n = S_0 \frac{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \dots \sin A_n}{\sin B_1 \sin B_2 \sin B_3 \dots \sin B_n} \quad (7)$$

После логарифмирования и дифференцирования (7) получим

$$\begin{aligned} \frac{M10^6}{S_0} (S_0) + \delta_{A_1} (A_1) - \delta_{B_1} (B_1) + \delta_{A_2} (A_2) - \delta_{B_2} (B_2) + \dots + \\ + \delta_{A_n} (A_n) - \delta_{B_n} (B_n) - \frac{M10^6}{S_n} (S_n) + w_s = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как коэффициенты при поправках в стороны есть ничто иное, как изменения логарифмов сторон при изменении длин сторон на 1 мм, то уравнение (8) может быть записано в окончательном виде так:

$$\begin{aligned} \Delta_0 (S_0) + \delta_{A_1} (A_1) - \delta_{B_1} (B_1) + \delta_{A_2} (A_2) - \delta_{B_2} (B_2) + \dots + \\ + \delta_{A_n} (A_n) - \delta_{B_n} (B_n) - \Delta_n (S_n) + w_s = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где δ_{A_i} и δ_{B_i} — изменения логарифмов синусов углов при изменении углов на 1"; Δ_0 и Δ_n — коэффициенты у поправок в измеренные стороны; w_s — свободный член уравнения, величина которого определяется по неисправленным углам.

Соответствующие выводы приведут нас к формулам для вычисления поправок в углы в следующем окончательном виде:

$$(A_i) = -\frac{w_{\beta_i}}{3} - \left(\frac{1}{3} \rho_i + \delta_{A_i} \right) Q_s, \quad (10)$$

$$(B_i) = -\frac{w_{\beta_i}}{3} - \left(\frac{1}{3} \rho_i + \delta_{B_i} \right) Q_s, \quad (11)$$

$$(C_i) = -\frac{w_{\beta_i}}{3} \mp \frac{1}{3} \rho_i Q_s. \quad (12)$$

В данном случае величина Q_s будет определяться из выражения

$$Q_s = \frac{\sum_1^n w_{\beta} \rho - 3w_s}{2 \sum_1^n R + 3(\omega_0 + \omega_n)}. \quad (13)$$

Кроме ранее принятых обозначений в формуле (13)

$$\omega_0 = q_{s_0} \Delta_0^2 \text{ и } \omega_n = q_{s_n} \Delta_n^2 \quad (14)$$

причем, если принять $\rho_{\beta} = 1$, получим

$$q_{s_0} = \frac{1}{\rho_{s_0}} = \frac{m_{s_0}^2}{m_{\beta}^2} \text{ и } q_{s_n} = \frac{1}{\rho_{s_n}} = \frac{m_{s_n}^2}{m_{\beta}^2}. \quad (15)$$

В выражениях (15) m_{s_0} и m_{s_n} — средние квадратические ошибки измерения выходных сторон ряда, а m_p — средняя квадратическая ошибка измерения угла, величина которой вычисляется по невязкам треугольников, то есть по формуле

$$m_p = \pm \sqrt{\frac{[\omega_{\beta} \omega_{\beta}]}{3n}}, \quad (16)$$

где ω_{β_i} — угловая невязка в i -ом треугольнике, а n — число треугольников в ряду.

Таким образом, формулы (10), (11) и (12) с учетом формул (13), (14), (15) и (16) решают вопрос об определении величин поправок в углы с учетом средних квадратических ошибок измерения не только углов, но и выходных сторон. Что касается величин поправок в измеренные стороны, то они находятся из выражения

$$(S_i) = q_s \Delta_i Q_s. \quad (17)$$

Для контроля произведенных уравнительных вычислений следует одну из уравненных выходных сторон принять за исходную и по уравненным углам вычислить остальные стороны треугольников ряда. В результате будет получена длина второй уравненной выходной стороны.

Ряд проложен между двумя крайними связующими сторонами и уравнивается за условия фигур, сторон и дирекционных углов.

Как и в предыдущем варианте построения ряда, приведем выражения для вычисления поправок в углы через свободные члены условных уравнений для случая, когда поправки в углы определяются под условием $[p_{\beta} v_{\beta}^2] = \min$, и для случая, когда ряд уравнивается под условием $[p_{\beta} v_{\beta}^2] + [p_s v_s^2] + [p_{\alpha} v_{\alpha}^2] = \min$, то есть с учетом ошибок измерения выходных сторон и определения их дирекционных углов.

Для первого случая мы получим следующие выражения для вычисления поправок в углы:

$$(A_i) = \frac{1}{3} (Q_{\alpha} - p_i Q_s - \omega_{\beta_i}) + \delta_{A_i} Q_s, \quad (18)$$

$$(B_i) = \frac{1}{3} (-Q_{\alpha} - p_i Q_s - \omega_{\beta_i}) + \delta_{B_i} Q_s, \quad (19)$$

$$(C_i) = \frac{1}{3} (Q_{\alpha} - p_i Q_s - \omega_{\beta_i}) \mp Q_{\alpha}. \quad (20)$$

Величины Q_s и Q_{α} в формулах (18), (19) и (20) определяются из выражений

$$Q_s = \frac{\theta (2n)^{-1} (W_{\beta} + 3\omega_{\alpha}) + \sum_{i=1}^n \omega_{\beta_i} p_i - 3\omega_s}{(2n)^{-1} \theta - 2 \sum_{i=1}^n R}, \quad (21)$$

$$Q_{\alpha} = - (2n)^{-1} (Q_s \theta + W_{\beta} + 3\omega_{\alpha}). \quad (22)$$

Кроме обозначений, принятых ранее, в формулах (18) — (22)

$$\Theta = \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 + \dots + \rho_{n-1} - \rho_n;$$

$$W_{\beta} = w_{\beta_1} - w_{\beta_2} + w_{\beta_3} - w_{\beta_4} + \dots + w_{\beta_{n+1}} - w_{\beta_n}$$

(w_3 — угловые невязки в треугольниках).

При выводе формул для вычисления поправок в углы с учетом ошибок измерения выходных сторон и определения их дирекционных углов, в случае выполнения условия

$$[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] + [p_\alpha v_\alpha^2] = \min$$

следует кроме условий фигур и условного уравнения сторон написать условие дирекционных углов в виде

$$(\alpha_0) \mp (C_1) \pm (C_2) \mp (C_3) \pm (C_4) \mp \dots - (\alpha_n) + w_a = 0. \quad (23)$$

В уравнении (23) (α_0) и (α_n) — искомые поправки в определенные дирекционные углы выходных сторон. Знаки у поправок в промежуточные углы определяют их положением (вправо или влево) по ходовой линии, идущей через вершины промежуточных углов.

Для данного случая будем иметь следующие нормальные уравнения коррелат:

$$\begin{aligned} & 3k_1 + \rho_1 Q_s \mp Q_\alpha + w_{\beta_1} = 0, \\ & 3k_2 + \rho_2 Q_s \pm Q_\alpha + w_{\beta_2} = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & 3k_n + \rho_n Q_s \mp Q_\alpha + w_{\beta_n} = 0, \\ & \rho_1 k_1 + \rho_2 k_2 + \dots + \rho_n k_n + \left(\sum_1^n \delta^2 + \omega_0 + \omega_n \right) Q_s + w_s = 0, \\ & \mp k_1 \pm k_2 \mp \dots \mp k_n + (n+2) Q_\alpha + w_\alpha = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

В этих уравнениях приняты те же обозначения, что и ранее, а величины ω_0 и ω_n определяются из выражения (14), причем p_a принято равным p_3 .

Решение уравнений (24) приведет нас к формулам для поправок в углы, аналогичным (18), (19) и (20), а величины Q_s и Q_a определяются по формулам:

$$Q_s = \frac{\Theta (2n+6)^{-1} (W_\beta + 3w_\alpha) + \sum_1^n w_\beta \rho - 3w_s}{\Theta^2 (2n+6)^{-1} - \left(2 \sum_1^n R + w_0 + w_n \right)}, \quad (25)$$

$$Q_a = -(2n+6)^{-1} (Q_s \Theta + W_\Theta + 3w_a). \quad (26)$$

Если средние квадратические ошибки определения дирекционных углов выходных сторон (m_a) не равны средней квадратической ошибке измерения угла (m_β), то значения величин $q_{\alpha_i} = \frac{1}{p_{\alpha_i}}$ будут:

$$q_{\alpha_0} = \frac{m_{\alpha_0}^2}{m_\beta^2} \quad \text{и} \quad q_{\alpha_n} = \frac{m_{\alpha_n}^2}{m_\beta^2}. \quad (27)$$

Для этого случая получим:

$$Q_s = - \frac{\Theta (2n + 3q_{\alpha_0} + 3q_{\alpha_n})^{-1} (W_\beta + 3w_\alpha) + \sum_1^n w_\beta \rho - 3w_s}{\Theta^2 (2n + 3q_{\alpha_0} + 3q_{\alpha_n})^{-1} - \left(2 \sum_1^n R + w_0 + w_n \right)}, \quad (28)$$

$$Q_\alpha = - (2n + 3q_{\alpha_0} + 3q_{\alpha_n})^{-1} (Q_s \Theta + W_\beta + 3w_\alpha), \quad (29)$$

причем формулы для вычисления поправок в углы остаются прежними, то есть формулы (18), (19) и (20).

Что касается вычисления поправок в измеренные выходные стороны и их дирекционные углы, то эти поправки будут определяться из выражений:

$$\left. \begin{aligned} (S_0) &= q_s \Delta_0 Q_s; & (S_n) &= q_{s_n} \Delta_n Q_s, \\ (\alpha_0) &= q_{\alpha_0} Q_\alpha & \text{и} & (\alpha_n) = q_{\alpha_n} Q_\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

В случае равенства величин $q_{\alpha_0} = q_{\alpha_n} = q_\beta$ получим, что $(\alpha_0) = -(\alpha_n) = Q_\alpha$.

Для контроля произведенных уравнительных вычислений следует одну из уравненных выходных сторон с уравненным дирекционным углом принять за исходную и по уравненным углам вычислить остальные стороны треугольников ряда и их дирекционные углы. Результат вычислений — длина второй уравненной выходной стороны и ее уравненный дирекционный угол.

Все приведенные формулы уравнивания триангуляционного ряда в разных вариантах его построения и в разных вариантах условия минимума суммы квадратов поправок в измеренные элементы настолько просты, что на практике дело сводится к элементарным вычислительным операциям, поэтому нет надобности приводить примеры. Однако будет полезно привести некоторые готовые данные, характеризующие изменение величин поправок в углы при уравнивании ряда под условием: $[p_\beta v_\beta^2] = \min$, $[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] = \min$ и $[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] + [p_\alpha v_\alpha^2] = \min$.

Для получения этих данных произведено уравнивание двенадцати рядов, причем каждый из них уравнивался во всех возможных вариантах построения и учета ошибок измеренных элементов. Число треугольников в опытных рядах — от пяти до десяти. По показателям точности полевых измерений и размерам сторон все эти ряды можно отнести к триангуляции 3-го либо 4-го класса (по нормам действующих в настоящее время инструкций).

Не приводя здесь подробных данных об изменении поправок в углы, укажем лишь, что величины этих поправок претерпевают изменения в пределах от $0'',0$ до $\pm 0'',95$ в зависимости от целого ряда факторов, характеризующих данный ряд как в геометрическом отношении, так и по точности измерений. Так, например, для ряда, состоящего из шести треугольников с связующими углами не менее 50° и не более 75° , то есть ряда, достаточно близкого к ряду, состоящему из равносторонних треугольников, со средней квадратической ошибкой измерения угла и определения дирекционного угла, равной $\pm 0,87$, ма-

ксимальное отклонение поправки в угол, при условии учета только ошибок измерения углов и ошибок двух крайних сторон и их дирекционных углов определилось величиной $+0'',52$. Определение азимутов (дирекционных углов) крайних сторон ряда несколько уменьшает приведенную выше величину разницы.

Наиболее обобщающим показателем точности ряда являются средние квадратические ошибки положения его вершин и, в частности, ошибка положения последней вершины ряда по отношению к начальной его вершине (M_{n+1}).

В геодезической литературе нет формул для вычисления средней квадратической ошибки положения вершин треугольников ряда после его уравнивания, которые учитывали бы кроме средней квадратической ошибки единицы веса числа и размеров сторон треугольников еще форму треугольников и форму самого ряда. Обычно приводятся формулы применительно к ряду, состоящему из равносторонних треугольников и вытянутому в одном направлении.

Вид формулы для оценки точности какой-либо вершины ряда по отношению к начальной устанавливается с помощью известного выражения [1]:

$$M = \pm \sqrt{m_s^2 + \frac{m_a^2}{\rho''^2} S^2}, \quad (31)$$

которое определяет величину средней квадратической ошибки линейного смещения конечной точки какой-либо линии, если известны средние квадратические ошибки длины линии m_s и ее дирекционного угла m_a . Строгим условием применения формулы (31) является независимость определения m_s и m_a , то есть эти ошибки должны быть ошибками непосредственного измерения длины линии и ее дирекционного угла.

Наметив ходовую линию по вершинам промежуточных углов треугольников ряда и рассматривая ее как полигонометрический ход [2], примем вычисленные связующие стороны треугольников ряда за непосредственно измеренные величины, а ошибки длин этих сторон и ошибки их дирекционных углов — за ошибки непосредственных измерений, как это сделано для стороны одного треугольника в [1].

При этом условии можно написать, что средняя квадратическая ошибка общего линейного смещения любой, в том числе и $(n+1)$ вершины ряда по отношению к начальной, может быть вычислена по формуле

$$M_{n+1} = \pm \sqrt{[m^2]_1^{n+1}}, \quad (32)$$

где m — средние квадратические ошибки положения последовательных вершин ходовой линии, каждая из которых вычисляется по формуле (31). Итак, для каждой стороны ходовой линии нужно знать величины m_s и m_a . Формулы для вычисления величин этих ошибок получим, исходя из следующих соображений.

Написав условные уравнения, свойственные данному ряду и разделив их на две группы, припишем к уравнениям второй группы соответствующие выражения для весовых функций. Далее, имея в виду формулу для определения величины, обратной весу уравновешенного элемента, после необходимых преобразований получим формулу для

определения $\frac{1}{P_F}$ с учетом ошибок измерения выходных сторон и определения их дирекционных углов в следующем общем виде:

$$\frac{1}{P_{lg s_k}} = [FF]_{s_k} - \frac{[AF]_{s_k}^2}{[AA]_{s_k}} - \frac{[BF \cdot 1]_{s_k}^2}{[BB \cdot 1]_{s_k}} + [qff]_{s_0} - \frac{[qaf]_{s_0}^2}{[qaa]_{s_0}}, \quad (33)$$

$$\frac{1}{P_{a_k}} = [FF]_{a_k} - \frac{[AF]_{a_k}^2}{[AA]_{a_k}} - \frac{[BF \cdot 1]_{a_k}^2}{[BB \cdot 1]_{a_k}} + [qff]_{a_0} - \frac{[qaf]_{a_0}^2}{[qaa]_{a_0}}. \quad (34)$$

В формулах (33) и (34) A_k , B_k и F_k — преобразованные коэффициенты условных уравнений вида (9) и (23) и соответствующей весовой функции без коэффициентов, относящихся к поправкам измеренных сторон и их дирекционных углов; a и f — преобразованные коэффициенты у поправок S_0 , S_n и a_0 , a_n в тех же уравнениях.

Учитывая, что третьи члены формул (33) и (34) практически малы, получим:

а) Ряд уравнивается под условием $[p_\beta v_\beta^2] = \min$ и за условия фигур и сторон без учета ошибок измеренных выходных сторон.

$$\frac{1}{P_{lg s_k}} = \frac{2}{3} [R]_1^k - \frac{\frac{2}{3} [R]_1^{k^2}}{[R]_1^n} \quad (35) \quad \text{и} \quad \frac{1}{P_{a_k}} = \frac{2}{3} k; \quad (36)$$

б) Ряд уравнивается под условием $[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] = \min$ и за условия фигур и сторон с учетом ошибок измерения выходных сторон.

$$\frac{1}{P_{lg s_k}} = \frac{2}{3} [R]_1^k - \frac{\frac{2}{3} [R]_1^{k^2}}{[R]_1^n} + \omega_0 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0 + \omega_n} \quad (37)$$

и

$$\frac{1}{P_{a_k}} = \frac{2}{3} k; \quad (38)$$

в) Ряд уравнивается под условием $[p_\beta v_\beta^2] = \min$ и за условия фигур, сторон и дирекционных углов без учета ошибок измерения выходных сторон и их дирекционных углов.

$$\frac{1}{P_{lg s_k}} = \frac{2}{3} [R]_1^k - \frac{\frac{2}{3} [R]_1^{k^2}}{[R]_1^n} \quad (39)$$

и

$$\frac{1}{P_{a_k}} = \frac{2}{3} k \left(1 - \frac{k}{n} \right); \quad (40)$$

г) Ряд уравнивается под условием $[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] + [p_a v_a^2] = \min$ и за условия фигур, сторон и дирекционных углов с учетом ошибок измерения выходных сторон и определения их дирекционных углов.

$$\frac{1}{P_{lg s_k}} = \frac{2}{3} [R]_1^k - \frac{\frac{2}{3} [R]_1^{k^2}}{[R]_1^n} + \omega_0 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0 + \omega_n} \quad (41)$$

и

$$\frac{1}{P_{a_k}} = \frac{2}{3} k \left(1 - \frac{k}{n} \right) + q_{a_0}^2 - \frac{(q_{a_0}^2)^2}{q_{a_0} + q_{a_n}}. \quad (42)$$

В формулах (35) — (42) $R_l = \delta_{3l-2}^2 + \delta_{3l-1}^2 + \delta_{3l-2} \delta_{3l-1}$; $\omega_0 = q_0 \Delta_0^2$; $\omega_n = q_n \Delta_n^2$; n — число треугольников ряда.

Средние квадратические ошибки m_{s_k} и m_{a_k} следует вычислять соответственно по формулам:

$$m_{s_k} = \pm 2,30 \mu S_k \sqrt{\frac{1}{P_{1g s_k}}} \quad (43)$$

и

$$m_{a_k} = \pm \mu \sqrt{\frac{1}{P_{a_k}}}, \quad (44)$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса, а подкоренные выражения определяются по формулам (35) — (42).

Практическое применение формул (31) и (32) с учетом формул (36) — (44) к рядам, о которых упоминалось выше, приводит, как правило, к довольно значительному (до 60—70%) увеличению средней квадратической ошибки положения конечной вершины ряда по отношению начальной, если сравнивать величины этих ошибок при применении условия $[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] + [p_a v_a^2] = \min$ и условия $[p_\beta v_\beta^2] = \min$.

В таблице приведены данные, характеризующие средние квадратические ошибки единицы веса и смещения конечной вершины (по отношению начальной) упомянутого выше ряда из шести треугольников.

Средние квадратические ошибки единицы веса
и смещения конечной вершины ряда

Варианты ряда	С. к. о. единицы веса (μ)	С. к. о. сме- щения ко- нечной вер- шины по от- ношению к начальной (M_m)	Условие $\min$ суммы квадратов поправок
Ряд уравновешен за условия фигур и сторон (m_s не учитывается)	$\pm 1,0$	$\pm 0,047$	$[p_\beta v_\beta^2] = \min$
Ряд уравновешен за условия фигур и сторон (m_s учитывается)	$1,4$	$0,073$	$[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] = \min$
Ряд уравновешен за условия фигур, сторон и дирекционных углов (m_s и m_a не учитываются)	$1,2$	$0,038$	$[p_\beta v_\beta^2] = \min$
Ряд уравновешен за условия фигур, сторон и дирекционных углов (m_s и m_a учитываются)	$1,4$	$0,052$	$[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] +$ $+ [p_a v_a^2] = \min$

Необходимо напомнить, что рассматриваемый ряд по своим геометрическим данным и точности измерений ($m_\beta = \pm 0'',87$; $m_s : s = 1 : 150\,000$; $m_a = m_\beta$) может быть отнесен к рядам сравнительно высокой точности.

Содержание статьи приводит к выводу, что уравнивание триангуляционного ряда, проложенного между двумя измеренными сторонами и определенными для этих сторон дирекционными углами, следует производить не под условием $[p_\beta v_\beta^2] = \min$, а под условием, соответствен-
но, либо

$$[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] = \min, \text{ либо } [p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] + [p_a v_a^2] = \min.$$

Такое уравнивание ряда приведет в конечном счете к минимально возможной и наиболее реальной в данных условиях деформации ряда.

Дальнейшие исследования затронутого в статье вопроса позволяют рекомендовать измерить еще одну сторону ряда, примерно, в его середине. Эта рекомендация относится и к рядам с небольшим числом треугольников. Выполнение ее приведет к значительному уменьшению средней квадратической ошибки общего линейного смещения конечной вершины ряда по отношению к его начальной вершине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов П. И. Применение формул для оценки полигонометрии к триангуляционному ряду. Сб. научных трудов Криворожского горнорудного ин-та, вып. 6. Металлургиздат, М., 1959.
 2. Чеботарев А. С., Селиханович В. Г., Соколов М. Н. Геодезия, ч. II. Геодезиздат, М., 1962.
-