

В. С. СЫТНИК

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАЗБИВОЧНЫХ РАБОТ

Математическую статистику можно с успехом использовать в некоторых областях геодезии. Одним из наиболее интересных с точки зрения использования в геодезии разделов этой обширной науки является дисперсионный анализ. Профессор А. С. Чеботарев неоднократно указывал на возможность и желательность использования этого интересного и своеобразного метода в геодезии. Его статья «Дисперсионный анализ, его роль при обработке результатов геодезических измерений» [5] содержит изложение метода дисперсионного анализа в применении к исследованию некоторых материалов геодезического производства.

В настоящей работе автор поставил своей целью изучить возможность применения дисперсионного анализа при обработке результатов геодезических измерений, в частности разбивочных работ.

В процессе строительства крупных промышленных объектов накапливается большое количество аналитических и графических геодезических материалов, подлежащих дальнейшей математической обработке. Целью этой обработки является оценка качества производства геодезических разбивочных работ, с одной стороны, и выявление зависимости между измеренными величинами, с другой. Устанавливаемая зависимость дает возможность найти закономерности, которые определяют изучаемое явление или условия, вызывающие его.

После окончания строительства промышленного объекта или комплекса его сооружений производится исполнительная съемка. В результате обработки материалов съемки получают аналитические данные: координаты и отметки характерных точек сооружений, расстояния между отдельными конструкциями внутри здания и т. д. Точность выноса проекта в натуру определяется по разностям проектных и измеренных аналитических данных. В этом случае за истинное принимается проектное значение выносимой в натуру величины (координаты, отметки, длины линии и т. д.). Ошибка положения точки сооружения, вынесенной в натуру, M состоит в основном из ошибок геодезических измерений M_1 , ошибок строительно-монтажных работ M_2 и ошибок изготовления строительных конструкций элементов сооружения M_3 . Так как эти средние квадратические ошибки независимы между собой, можно записать

$$M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2. \quad (1)$$

Установить степень влияния того или иного источника ошибок (M_1, M_2, M_3) на общую ошибку M положения точки в натуре можно только путем проведения специальных экспериментальных работ.

Простейшим методом изучения полученных аналитических данных является параллельное сопоставление рядов.

Однако непосредственное сопоставление рядов измерений не всегда может дать представление о характере существенного влияния какого-либо фактора или группы таких факторов на рассматриваемые результаты измерений. Часто в общей картине полученных данных трудно уловить закономерность в явлении. В таких случаях полезно произвести определенную группировку данных по каким-либо признакам и подвергнуть эти данные математической обработке. В результате математической обработки получают соответствующие критерии, по которым можно судить о характере и величине влияния того или иного фактора на результаты измерений.

В качестве примера произведем обработку результатов исполнительной съемки вынесенных в натуру элементов подкрановых путей. В результате съемки были получены отметки H_i головок подкрановых рельсов и расстояния между их осями l_i в семи пролетах одного из крупных промышленных цехов металлургического завода.

Согласно проектному заданию, в строящемся цехе подкрановые рельсы всех семи пролетов должны быть установлены на одну и ту же отметку с точностью, определяемой требованиями СНиП [4]. Оси пролетов имеют взаимно перпендикулярное расположение. Таким образом, в качестве одной и той же измеряемой величины принимается проектная отметка головок рельсов, одинаковая для всех пролетов. Сравнивая отметки H_i , полученные в результате съемки, с проектной отметкой H_p , мы определяем разности ΔH_i , которые характеризуют точность выноса проекта в натуру. Характеризовать точность собственно геодезических измерений по этим данным нельзя, так как на величину M из (1) влияют еще погрешности изготовления конструкций и производства строительно-монтажных работ. Поэтому дисперсионный анализ в данном случае нами применяется не для выявления систематических ошибок геодезических измерений, а для установления возможного появления систематических ошибок разной величины в положении рельсов по каждому пролету цеха.

Все измерения производились одним и тем же лицом и одним и тем же инструментом. В этом случае каждое из результатов измерений получит одну и ту же по величине и по знаку постоянную ошибку. Поэтому нулевую гипотезу о различии величин личных и инструментальных ошибок можно отвергнуть.

Анализируя результаты контрольной съемки подкрановых путей, мы хотим установить, с одинаковой ли точностью вынесены в натуру подкрановые рельсы по каждому пролету цеха.

Такая постановка вопроса вполне естественна, так как в каждом пролете цеха при установке элементов конструкций в проектное положение (на одну и ту же отметку) применялись одни и те же инструменты и приспособления, геодезические и строительно-монтажные методы производства работ и конструкции одинаковых размеров.

Рассмотрим случай применения однофакторного дисперсионного анализа к затронутым вопросам.

Пусть число пролетов будет m и в каждом пролете определяется положение головок рельсов n раз, то есть у каждой колонны. Эти n отметок мы рассматриваем как случайную выборку из генеральной совокупности отметок по всем m пролетам. Всего мы располагаем mn

отметками, которые обозначим через H_{ij} , где i есть номер пролета и j — номер определяемой в нем отметки. При этом i изменяется от 1 до m , а j — от 1 до n .

На основании этих статистических данных мы хотим проверить нулевую гипотезу о равноточности разбивочных работ в каждом пролете цеха. Если обозначить через $\bar{H}_1$ среднюю арифметическую из n отметок, определенных в первом пролете, через $\bar{H}_2$ — среднюю из отметок по второму пролету и т. д., то их выражение в общем виде можно представить так:

$$\bar{H}_1 = \frac{\sum_{j=1}^n H_{1j}}{n}, \quad \bar{H}_2 = \frac{\sum_{j=1}^n H_{2j}}{n}, \dots, \quad \bar{H}_m = \frac{\sum_{j=1}^n H_{mj}}{n}. \quad (2)$$

При неограниченно большом числе измерений величины $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_m$ будут представлять собой математические ожидания $M(H)$ случайной величины H_i .

Обозначив через $\bar{H}$ общую арифметическую средину всех mn отметок, получим

$$\bar{H} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_{ij}. \quad (3)$$

Применительно к рассматриваемому нами случаю с учетом (2) и (3) напомним в окончательном виде основные формулы дисперсионного анализа для нахождения квадратов средних квадратических ошибок, характеризующих точность положения элементов сооружения, вынесенных в натуру:

1) квадрат средней квадратической ошибки отметки i -го пролета

$$s_1^2 = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H}_i)^2; \quad (4)$$

2) квадрат средней квадратической ошибки отметки по отдельным пролетам

$$s_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{H}_i - \bar{H})^2; \quad (5)$$

3) квадрат средней квадратической ошибки отметки по всем пролетам

$$s_0^2 = \frac{1}{mn-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H})^2. \quad (6)$$

В этих формулах приняты такие же обозначения, как и в формулах (2) и (3). Введем следующие обозначения:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H}_i)^2, \quad Q_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{H}_i - \bar{H})^2, \quad Q_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H})^2. \quad (7)$$

Предположим, что гипотеза о равноточности разбивочных работ верна и поэтому отметки $H_1, H_2, \dots, H_m$ по каждому пролету имеют

одинаковое математическое ожидание $M(H)$ и дисперсию $\sigma^2(H)$. Тогда все mn отметок можно рассматривать как выборку из одной и той же генеральной совокупности, а величина $\frac{Q_0}{mn-1}$ является несмещенной

оценкой дисперсии $\sigma^2(H)$ по этой выборке. В таком случае величина $\frac{Q_0}{\sigma^2(H)}$ будет следовать распределению χ^2 с $(mn-1)$ степенями свободы или, выражаясь геодезическим языком, числом дополнительных измерений.

Средние по группам $\bar{H}_i$ нормально распределены с дисперсией $\frac{\sigma^2(H)}{n}$ каждая и независимы друг от друга. Средняя арифметическая из m средних $\bar{H}_i$ равна $\bar{H}$. Поэтому при нашей гипотезе квадрат средней квадратической ошибки по отдельным пролетам

$$\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\bar{H}_i - \bar{H})^2 = \frac{Q_1}{n(m-1)} \quad (8)$$

является несмещенной выборочной характеристикой дисперсии. В таком случае величина

$$\frac{\frac{Q_1}{n}}{\frac{\sigma^2(H)}{n}} = \frac{Q_1}{\sigma^2(H)} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{H}_i - \bar{H})^2}{\sigma^2(H)} \quad (9)$$

распределена по закону χ^2 с $(m-1)$ степенями свободы. Наконец, величина:

$$\frac{\sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H}_i)^2}{\sigma^2(H)} \quad (10)$$

распределена по закону χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы. Распределение χ^2 обладает одним замечательным свойством: две независимые величины χ_1^2 и χ_2^2 , распределенные по законам χ^2 с m и n степенями свободы, соответственно дают в сумме величину $\chi_1^2 + \chi_2^2$, распределенную также по закону χ^2 с $(m+n)$ степенями свободы. Используя это свойство, мы найдем, что компонент

$$\frac{Q_2}{\sigma^2(H)} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H})^2}{\sigma^2(H)} \quad (11)$$

распределен по закону χ^2 с $m(n-1)$ степенями свободы. Величина

$\frac{Q_2}{m(n-1)}$ является также оценкой параметра $\sigma^2(H)$.

При поставленном выше условии равенства $M(H)$ и $\sigma^2(H)$ отношение квадратов средних квадратических ошибок $\frac{s_2^2}{s_1^2}$ должно быть близким к единице, то есть

$$F_{\text{эмп}} = \frac{s_2^2}{s_1^2}, \quad (12)$$

где $F_{\text{эмп}}$ — критерий Фишера. Р. Фишер разработал специальную таблицу, пользуясь которой можно определить с надлежащей степенью вероятности по отношению (12), верна или неверна в действительности нулевая гипотеза.

Таким образом, величина $F_{\text{эмп}}$, определяемая по формуле (12), в данном случае нами используется как критерий отступления действительности от нулевой гипотезы, то есть для установления равноточности высотной разбивки подкрановых рельсов в каждом пролете цеха.

В формуле (12) числитель s_2^2 учитывает расхождения между математическими ожиданиями $M(H)$ и имеет тенденцию увеличиваться при возрастании этих расхождений. Тем самым и критерий $F_{\text{эмп}}$ имеет тенденцию расти и становится тем более, чем больше отклонения от предполагаемого равенства $M(H)$.

Следовательно, правило проверки гипотезы заключается в следующем. Нулевая гипотеза верна в том случае, если критерий $F_{\text{эмп}}$, полученный по формуле (12), меньше критерия F_q , взятого из специальных таблиц, то есть $F_{\text{эмп}} \leq F_q$; нулевая гипотеза неверна, если $F_{\text{эмп}} > F_q$. Таблицы для нахождения F_q даны почти во всех курсах по математической статистике.

Схема однофакторного дисперсионного анализа представлена в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Рассеивание	Число степеней свободы	Сумма квадратов [Q]	Среднее из квадратов [s^2]	Критерий $F_{\text{эмп}}$
Между системами (сериями)	$m-1$	$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{H}_i - \bar{H})^2$	$\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \times$ $\times (\bar{H}_i - \bar{H})^2$	$F_{\text{эмп}} = \frac{s_2^2}{s_1^2}$
Внутри систем (серий)	$m(n-1)$	$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H}_i)^2$	$\frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \times$ $\times (H_{ij} - \bar{H}_i)^2$	
Суммарное	$mn-1$	$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H})^2$	$\frac{1}{mn-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \times$ $\times (H_{ij} - \bar{H})^2$	

В табл. 2 приведены результаты определения положения головок рельсов, вынесенных на одну и ту же проектную отметку, по каждому пролету цеха. В каждом пролете имеется по два рельса. Поэтому для обработки принято 14 рядов измерений. Для сокращения размеров табл. 2 и уменьшения объема вычислений в ней даны не сами изме-

$m \backslash n$	ΔH_1	ΔH_2	ΔH_3	ΔH_4	ΔH_5	ΔH_6	ΔH_7	ΔH_8	ΔH_9	ΔH_{10}	ΔH_{11}	ΔH_{12}	ΔH_{13}	ΔH_{14}
1	+5	+6	0	+1	-14	-19	-15	-10	-3	0	-14	-19	0	+1
2	+7	-6	+4	-9	-13	-14	-5	-3	-12	+9	-13	-14	-1	+2
3	-2	-5	+7	+3	-11	-7	0	-1	-2	+18	-11	-7	-3	+6
4	-3	-1	+5	+8	-8	-9	+1	+4	-4	+17	-8	-9	-3	+6
5	-1	+2	-12	+11	-3	-5	-3	+3	-1	-1	-3	-5	-3	0
6	-2	0	+17	+8	-4	-4	+8	+5	+8	0	-4	-4	-2	+9
7	-2	0	+18	+8	-2	-5	+7	+7	-4	-1	-2	-5	+8	+18
8	+5	+9	-14	+9	0	-8	-3	-2	-6	-11	0	-8	+6	+17
9	-1	+11	+2	+9	-4	-4	+5	-5	-8	-12	-4	-4	-1	+8
10	+6	+8	+1	+11	+1	+3	+8	+3	-1	-11	+1	+3	+8	0
11	+9	+6	0	+10	+6	+3	+3	+7	+3	-4	+6	+3	-4	-11
12	+12	+8	0	+1	-3	+6	+3	+13	+3	+3	-3	+6	-6	-12
13	+12	0	-8	-4	+4	+8	+6	+10	+16	-11	+4	+8	-8	-1
14	+10	+5	-5	+6	-2	+2	+6	+10	+11	+2	-2	-2	-1	+3
15	+6	-1	-6	+6	-8	-8	+6	+5	+1	+10	-8	-8	-3	-11
16	+2	+7	+10	-14	-6	-1	+10	+13	+4	+4	-6	-1	+3	+2
17	0	+3	+11	-12	-2	-1	+15	+13	+4	+4	-2	-1	+16	+10
18	0	-1	+9	+13	-5	0	+18	+13	+2	-6	-5	0	+11	+4
19	+9	+9	+17	+15	+4	-3	+8	+7	-11	+1	+4	-3	+1	+4
20	+4	+3	+18	+17	+7	+1	+7	-10	+3	-7	+7	+1	+4	-6
21	+8	+9	+17	-20	-8	+2	+7	-10	-5	-4	+8	+2	+4	+1
22	-2	0	+14	+16	+1	+7	+13	+13	-7	-7	+1	+12	+2	-7
23	+2	-1	+13	+7	+6	+7	+10	+10	-10	-7	+6	+17	-12	-4
24	0	+2	+5	+5	+7	+7	+14	+4	-11	-6	+7	+7	+3	-7
25	0	+10	+7	+5	-9	+8	+6	+12	-10	-8	+9	+8	-5	-7
26	-2	-4	+5	+2	-10	+16	+3	+3	-2	-18	+10	+16	-7	-7
27	-4	-3	+3	-1	+14	+10	+3	-4	0	-13	+14	+10	-10	-6
28	-1	-6	+2	0	+10	2	0	0	+1	-7	+10	+2	-11	-8
29	-3	+6	0	+3	+14	+6	+2	+2	+4	-6	+14	+6	-10	-13
30	-5	+4	-2	+1	+8	-8	-8	0	+3	0	+8	-3	-2	-11
$\Sigma \Delta H$	+69	+84	+190	+205	+49	+2	+130	+163	-35	-47	+14	+6	-20	+7
$\Sigma \Delta H^2$	891	910	2848	2669	1642	1702	1995	2135	1365	2227	1641	1982	1298	1943
$(\Sigma \Delta H)^2$	4761	7056	36100	42025	2401	4	16900	26569	1225	2209	196	36	400	49

$$\Sigma \Sigma \Delta H = +817.$$

$$\Sigma \Sigma \Delta H^2 = 25248.$$

$$\Sigma (\Sigma \Delta H)^2 = 139931.$$

ренные отметки H_{ij} , а их отклонения от проектной отметки H_p , которая является одинаковой для всех пролетов. Все остальные обозначения в таблице не требуют пояснений.

Так как разности ΔH_{ij} , представляют собой сравнительно малые величины, то для вычисления сумм квадратов Q_1 , Q_2 и Q_0 применялись следующие формулы [3]:

$$Q_1 = \sum_{ij} \Delta H_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \Delta H_{ij} \right)^2}{n}, \quad (13)$$

$$Q_2 = \frac{\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \Delta H_{ij} \right)^2}{n} - \frac{\left(\sum_{ij} \Delta H_{ij} \right)^2}{mn}, \quad (14)$$

$$Q_0 = \sum_{ij} \Delta H_{ij}^2 - \frac{1}{mn} \left(\sum_{ij} \Delta H_{ij} \right)^2. \quad (15)$$

Из табл. 2, применяя формулы (13), (14) и (15), получаем:

$$Q_1 = 25248 - \frac{139931}{30} = 25248 - 4664 = 20584;$$

$$Q_2 = \frac{139931}{30} - \frac{1}{420} \times 817^2 = 4664 - 1589 = 3075;$$

$$Q_0 = 25248 - \frac{1}{420} 817^2 = 25248 - 1589 = 23659.$$

Средние из квадратов s_1^2 , s_2^2 и s_0^2 вычисляем по формулам (4), (5) и (6):

$$s_1^2 = \frac{1}{m(n-1)} \cdot Q_1 = \frac{1}{14(30-1)} \cdot 20584 = 50,7,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{m-1} \cdot Q_2 = \frac{1}{14-1} \cdot 3075 = 236,5,$$

$$s_0^2 = \frac{1}{mn-1} \cdot Q_0 = \frac{1}{14 \cdot 30 - 1} \cdot 23659 = 56,5.$$

Результаты вычислений сведены в табл. 3.

Таблица 3

Рассеивание	Число степеней свободы	Сумма квадратов (Q)	Среднее из квадратов (S^2)	Критерий ($F_{\text{эмп}}$)
Между системами (пролетами)	13	3075	236,5	4,66
Внутри систем (пролетов)	406	20584	50,7	
Суммарное	419	23659	56,5	

Произведя проверку нулевой гипотезы с помощью критерия $F_{\text{эмп}}$ находим

$$F_{\text{эмп}} = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{236,5}{50,7} = 4,66.$$

При степенях свободы, соответствующих большей ($K=13$) и меньшей дисперсии ($K=406$), по таблицам Фишера находим критические границы для $F_{\text{эмп}}$, равные при 5-проц. уровне значимости 1,78 и 1-проц. уровне 2,23. Полученное нами из обработки результатов измерений значение $F_{\text{эмп}}$ превышает указанные границы.

Следовательно, принятая выше нулевая гипотеза о равнозначности выноса проекта в натуру неверна, то есть подкрановые рельсы во всех пролетах цеха установлены с различной погрешностью, что в свою очередь указывает на нарушение требований СН и П, согласно которым все однотипные элементы зданий и сооружений должны быть вынесены в натуру с одинаковой погрешностью во всех частях зданий. Утверждать, какой из видов работ геодезический или строительно-монтажный дал большую погрешность при выносе проекта в натуру, трудно, так как при разбивочных работах в большинстве случаев не производят дополнительные измерения, а также проверку соответствия размеров строительных конструкций проектным данным.

При принятых ранее условиях отсутствия личных и инструментальных систематических погрешностей равной величины можно пола-

гать, что неравноточность высотной разбивки подкрановых путей обусловлена либо тем, что исходные реперы имели ошибки разной величины, либо несоответствием размеров строительных конструкций в различных частях здания проектным данным.

Произведем оценку расхождения между полученными оценками высотного положения двух смежных рельсов, например, 4 и 5, используя данные табл. 2, с помощью доверительного интервала:

$$\left| (\Delta \bar{H}_4 - \Delta \bar{H}_5) - \frac{t_{q,k}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \cdot s_2 \right| < \gamma < \left| (\Delta \bar{H}_4 - \Delta \bar{H}_5) + \frac{t_{q,k}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \cdot s_2 \right|, \quad (16)$$

- где $\Delta \bar{H}_4 - \Delta \bar{H}_5$ — разность средних соответственно по ряду 4 и 5;
 $s_2 = \sqrt{s_2^2}$ — средняя квадратическая ошибка между сериями 4 и 5;
 n — число измерений в сериях 4 и 5;
 γ — расхождение между полученными оценками рядов 4 и 5.

При заданных q и $m(n-1)$ величина t выбирается из специальных таблиц (см. табл. 5 приложений [3]). Принимая $q=10\%$ и число степеней свободы $m(n-1)=14(30-1)=406$, получаем $t_{10,406}=1,645$. Из табл. 2 имеем: $s_2^2=50,7$ мм, $s_2=7$ мм, $\Delta \bar{H}_4 - \Delta \bar{H}_5=5,20$. Подставляя эти данные в формулу (16), получаем:

$$\left(5,20 - \frac{1,645}{\sqrt{\frac{30}{2}}} \cdot 7 \right) < \gamma < \left(5,20 + \frac{1,645}{\sqrt{\frac{30}{2}}} \cdot 7 \right)$$

или

$$+2,20 \text{ мм} < \gamma < +8,20 \text{ мм}. \quad (17)$$

Как следует из (17), расхождения между полученными оценками положений двух смежных рельсов 4 и 5 достигают величины 6,00 мм, то есть больше половины допуска ($\Delta=10$ мм), установленного СН и П [4] разности отметок головок рельсов на опорах в одном поперечном разрезе пролета цеха.

Аналогично предыдущему рассмотрим вопрос о точности планового положения подкрановых путей в трех пролетах цеха. Техническим заданием предусмотрена установка в каждом из трех пролетов двух смежных рельсов, расстояния между осями которых равны 27,500 м. Согласно требованиям СНиП [4], отклонение расстояний между осями подкрановых рельсов, вынесенного в натуру, от его проектного значения допускается не более ± 5 мм. Несоблюдение этого допуска приводит к преждевременному износу реборд ходовых колес тележек мостового крана. С геодезической точки зрения возникает задача установки подкрановых рельсов в каждом из трех пролетов с отклонением от проектного расстояния (27,500 м) не более ± 5 мм. Так как в этих трех пролетах будут работать краны одинаковой конструкции и размеров, то расстояния между рельсами по каждому пролету должны быть вынесены в натуру с одинаковой точностью, что и составляет нулевую гипотезу в наших исследованиях.

В табл. 4 дан пример обработки результатов контрольных измерений расстояний между осями смежных рельсов в трех пролетах. Так как проектные расстояния между осями рельсов для каждого пролета одинаковы, то в табл. 4 даны отклонения Δl_{ij} измеренных расстояний

l_{ij} между осями рельсов от их проектного значения $l_p = 27,500$ м, то есть

$$\Delta l_{ij} = l_{ij} - l_p, \tag{18}$$

где $i = n$ — число измеренных расстояний в отдельном пролете;
 $j = m$ — число пролетов.

Таблица 4

$m \backslash n$	1		2		3	
	Δl_1	Δl_1^2	Δl_2	Δl_2^2	Δl_3	Δl_3^2
1	+7	49	—4	16	—6	36
2	+5	25	—1	1	+1	1
3	+6	36	—5	25	+4	16
4	—1	1	—1	1	—6	36
5	—2	4	—3	9	0	0
6	+4	16	—2	4	—5	25
7	0	0	—2	4	0	0
8	0	0	+1	1	+3	9
9	+4	16	—3	9	—7	49
10	—4	16	+1	1	—3	9
11	+1	1	+1	1	—2	4
12	—5	25	—4	16	0	0
13	+7	49	—6	36	—5	25
14	+6	36	—4	16	+7	49
15	+6	36	—5	25	+5	25
16	+4	16	+1	1	+6	36
17	—6	36	0	0	—2	4
18	—5	25	—1	1	+5	25
19	+3	9	—5	25	+5	25
20	+5	25	—4	16	+5	25
21	+6	36	—7	49	+7	49
22	—5	25	—7	49	+6	36
$\Sigma \Delta l$	+46		—60		+22	
$\Sigma \Delta l^2$		482		306		423
$(\Sigma \Delta l)^2$	2116		3600		484	

$$\begin{aligned} \Sigma \Sigma \Delta l &= +8 \\ \Sigma \Sigma \Delta l^2 &= 1211 \\ \Sigma (\Sigma \Delta l)^2 &= 6200 \end{aligned}$$

Обработка результатов измерений производилась по формулам (6) (7), (8), (14), (15), (16) и (17), где вместо ΔH принято Δl . Результаты вычислений сведены в табл. 5.

Таблица 5

Рассеивание	Число степеней свободы	Сумма квадратов (Q)	Среднее из квадратов (s^2)	Критерий $F_{\text{эмп}}$
Между системами (сериями)	2	281	140,5	9,55
Внутри систем (серий)	63	929	14,7	
Суммарное	65	1210	18,6	

Находим эмпирический критерий $F_{\text{эмп}}$ по формуле (14):

$$F_{\text{эмп}} = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{140,5}{14,7} = 9,55.$$

Согласно табл. 5 имеем: $K_1=2$ и $K_2=63$. По таблицам находим критические границы для $F_{\text{эмп}}$, равные при 5-проц. уровне значимости 2,78 и 1-проц. уровне — 4,13. Полученное эмпирическое значение критерия $F_{\text{эмп}}$ больше того же критерия (критические границы) F_q , взятого из таблиц, при данных степенях свободы K_1, K_2 , то есть $F_{\text{эмп}} > F_q$. Поэтому нулевая гипотеза о равноточности планового положения подкрановых рельсов для каждого пролета неверна.

В каждом пролете оси подкрановых рельсов в натуру выносились следующим образом. От разбивочной оси здания в натуру выносилась ось одного рельса, а положение оси второго рельса получено путем отложения проектного расстояния подкранового пролета. При таком методе разбивки осей подкрановых путей ошибки исходных геодезических данных не оказывают влияния на точность выноса проектного расстояния. Следует предполагать, что основными источниками ошибок линейных измерений при выносе в натуру осей рельсов в рассматриваемом нами случае являются либо неодинаковое натяжение мерного прибора в каждом пролете, либо применение мерных приборов, имеющих различные по величине и по знаку систематические ошибки в длине их.

Определим расхождения между полученными оценками, например, для 1 и 2 пролетов по формуле:

$$\left| (\bar{\Delta l}_1 - \bar{\Delta l}_2) - \frac{t_{q,k}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \cdot s_2 \right| < \gamma < \left| (\bar{\Delta l}_1 - \bar{\Delta l}_2) + \frac{t_{q,k}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \cdot s_2 \right|, \quad (19)$$

где $\bar{\Delta l}_1$ и $\bar{\Delta l}_2$ — средние из отклонений Δl соответственно по пролету 1 и 2.

Остальные обозначения такие же, как и в формуле (18). Из табл. 4 и 5 имеем: $\bar{\Delta l}_1 = +2,1$ мм, $\bar{\Delta l}_2 = -2,8$ мм, $s_2 = \sqrt{s_2^2} = 3,8$ мм. Принимая $q=10\%$ и $m(n-1)=3$ ($22-1$)= 63 , получим $t_{10,63}=1,645$. Подставляя эти величины в формулу (21), получим

$$\left| (2,1 + 2,8) - \frac{1,645}{\sqrt{\frac{22}{2}}} \cdot 3,8 \right| < \gamma < \left| (2,1 + 2,8) + \frac{1,645}{\sqrt{\frac{22}{2}}} \cdot 3,8 \right|$$

или

$$+3,0 \text{ мм} < \gamma < +6,8 \text{ мм}. \quad (20)$$

Из выражения (20) видим, что длина доверительного интервала $+3,8$ мм приближается к величине допуска, установленного СНиП.

Производственная обработка результатов измерений с применением дисперсионного анализа показывает, что точность положения строительных конструкций, вынесенных в натуру, не всегда бывает одинаковой во всех частях здания или сооружения, хотя техническим заданием и геодезическими расчетами предусматривается равноточность выноса проекта в натуру. Возможно, что в отдельных случаях неравноточность переноса в натуру и не окажет существенного влияния на эксплуатационные качества того или иного промышленного агрегата (мостовых кранов, прокатных станов и т. д.). Однако во избежание возможного нарушения требований СНиП при составлении геодезического проекта разбивочных работ следует предусмотреть все меры, чтобы точность выноса проекта в натуру во всех частях промышленных зданий и сооружений была одинаковой. Это, в свою очередь, обеспечит нормальные условия для работы промышленных цехов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Видуев Н. Г., Ракитов Д. И. Приложение геодезии в инженерно-строительном деле. «Недра», М., 1964.
2. Левчук Г. П. Инженерная геодезия, ч. II—III. Геодезидат, М., 1958.
3. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. «Наука», М., 1965.
4. Строительные Нормы и Правила (СНиП). II—В. 3—62, III—В. М., 1963.
5. Чеботарев А. С. Дисперсионный анализ, его роль при обработке результатов геодезических измерений. «Геодезия и картография», 1957, № 12.

Работа поступила
5 января 1966 г.
