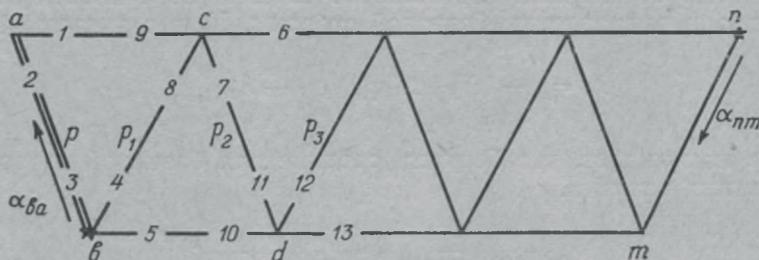


А. Т. ДУЛЬЦЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕДУКЦИОННОЙ ПОСТОЯННОЙ h_0

Для определения отступлений геоида от референц-эллипсоида известна формула, предложенная Н. К. Мигалем [1]. В случае совмеще-



Звено триангуляции первого класса.

ния центра референц-эллипсоида с центром тяжести Земли формула Мигалья принимает вид

$$h = N + K(\varphi) + h_0, \quad (1)$$

где h — высота геоида над референц-эллипсоидом в точке с астрономическими координатами φ, λ ;

N — часть высоты h , вычисляемая по формуле Стокса;

h_0 — редуцированная постоянная, характеризующая потенциал силы тяжести на геоиде; член $K(\varphi)$ следующим образом связан с большой полуосью a референц-эллипсоида

$$K(\varphi) = am_1 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} am_2 \sin^2 2\varphi.$$

Величины m_1 и m_2 являются известными постоянными.

Практическое использование формулы (1) возможно только в том случае, если будет известна величина редуцированной постоянной.

Первая попытка приближенного вычисления редуцированных постоянных, в том числе и h_0 , сделана Т. Н. Чалюком [2], который определял редуцированные постоянные из градусных уравнений нового типа, составленных специально для этой цели [3]. При этом он исходил из того положения, что для вычисления редуцированных постоянных можно брать только дуги геоида, выходящие из начального пункта триангуляционной системы. Но в работе [4] Н. К. Мигаль пришел к выводу, что это ограничение не обязательно.

Ниже предлагается иной путь определения h_0 , в котором могут быть использованы все звенья астрономо-геодезической сети.

Для составления уравнений, определяющих редуцированную постоянную, необходимо выявить h_0 в процессе редуцирования измеренных величин на референц-эллипсоид, при решении сферических треугольников и в процессе передачи координат. Чтобы проиллюстрировать приводимые выкладки, возьмем звено триангуляции первого класса (см. рис.), в котором измерены все направления, базисная сторона ab и астрономические координаты и азимуты в пунктах b и n . Все измерения будем считать выполненными на поверхности геоида.

Редуцирование базисной стороны

Пусть p — измеренная длина базисной стороны, а s — ее проекция на референц-эллипсоид. С достаточной точностью

$$s = p - \frac{h_e}{R} p, \quad (2)$$

где R — радиус кривизны нормального сечения поверхности референц-эллипсоида в направлении базисной стороны. Или с учетом (1)

$$s = p - [N_e + K(\varphi_e)] \frac{p}{R} - h_0 \frac{p}{R}. \quad (3)$$

Индекс e показывает, что берутся средние для базисной стороны значения данных величин.

Редуцирование направлений

Обычно для приведения измеренных направлений к поверхности референц-эллипсоида в эти направления вводятся три поправки: за уклонение отвесной линии от нормали к поверхности эллипсоида δ_1 , за переход от нормального сечения к геодезической линии δ_2 , и за высоту наблюдаемой точки δ_3 . Так как для направлений, измеренных на поверхности геоида, можно считать зенитные расстояния равными 90° , то

$$\delta_1 = 0.$$

Поправка δ_2 вычисляется по формуле

$$\delta_2'' = - \frac{e^2}{12\rho''} s_{ik}^2 (2)_e^2 \sin 2A_{ik} \cos^2 B_e. \quad (4)$$

Индекс i обозначает определяемую точку, индекс k — наблюдаемую. Эта поправка практически не зависит от редуцированной постоянной. Действительно, дифференцируя по s и переходя к конечным разностям, имеем

$$\Delta\delta_2'' = -2\delta_2'' \frac{\Delta s}{s}.$$

Даже при $\delta_2'' = 0,01$ и $\frac{\Delta s}{s} = \frac{h}{R}$ получаем вполне пренебрегаемую величину $\Delta\delta_2''$

$$\Delta\delta_2'' = -2 \cdot 0,01 \cdot \frac{600}{6\,000\,000} = -0,000\,002,$$

т. е. для вычисления поправки δ_2 знание редуccionной постоянной не обязательно, и ее можно учесть при предварительном решении триангуляции.

Поправка δ_3 определяется формулой

$$\delta_3 = h_k (1)_k \frac{e^2}{2} \sin 2A_{ik} \cos^2 B_k.$$

Подставляя в это выражение (1), получим

$$\delta_3 = [N_k + K(\varphi_k)] \cdot D + h_0 D, \quad (5)$$

где

$$D = (1)_k \frac{e^2}{2} \sin 2A_{ik} \cos^2 B_k. \quad (6)$$

Таким образом, для приведения измеренных направлений к поверхности референц-эллипсоида надо к исправленным за переход от нормального сечения к геодезической линии направлениям добавить поправку за высоту наблюдаемой точки (5). Если обозначить спроектированное направление через r_0 , а через r — измеренное, исправленное поправкой δ_2 , то

$$r_0 = r + Dh_0 + L, \quad (7)$$

где

$$L = [N_k + K(\varphi_k)] D. \quad (8)$$

Вычисление сторон треугольников на референц-эллипсоиде

Мы получили формулы для вычисления проекций базисной стороны (3) и направлений (7) как функций редуccionной постоянной h_0 . Приступим к последовательному вычислению длин сторон s_i треугольников на поверхности референц-эллипсоида.

Проекция стороны bc будет

$$s_1 = s \frac{\sin(2-1)_0}{\sin(9-8)_0}.$$

Индекс 0 указывает на то, что данные углы должны быть отнесены к референц-эллипсоиду. Согласно (7), имеем

$$(2-1)_0 = 2-1 - \frac{\varepsilon_1}{3} + h_0(D_2 - D_1) + (L_2 - L_1);$$

$$(9-8)_0 = 9-8 - \frac{\varepsilon_1}{3} + h_0(D_9 - D_8) + (L_9 - L_8);$$

где ε_1 — сферический избыток первого треугольника. Разложим тригонометрические функции этих углов в ряды. Ограничившись первыми членами, получим

$$\begin{aligned} \sin(2-1)_0 &= \sin\left(2-1 - \frac{\varepsilon_1}{3}\right) + \frac{h_0}{\rho''} (D_2 - D_1) \cos\left(2-1 - \frac{\varepsilon_1}{3}\right) + \\ &+ \frac{1}{\rho''} (L_2 - L_1) \cos\left(2-1 - \frac{\varepsilon_1}{3}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \csc(9-8)_0 = \csc\left(9-8-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) - \frac{h_0}{\rho''} (D_9-D_8) \operatorname{ctg}\left(9-8-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) \csc\left(9-8-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) - \\ - \frac{1}{\rho''} (L_9-L_8) \operatorname{ctg}\left(9-8-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) \csc\left(9-8-\frac{\varepsilon_1}{3}\right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу (3) и полученные разложения, находим

$$\begin{aligned} s_1 = p_1 + h_0 p_1 \left[\frac{1}{\rho''} (D_2-D_1) \operatorname{ctg}\left(2-1-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho''} (D_9-D_8) \operatorname{ctg}\left(9-8-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) - \frac{1}{R} \right] + p_1 \left[\frac{1}{\rho''} (L_2-L_1) \operatorname{ctg}\left(2-1-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho''} (L_9-L_8) \operatorname{ctg}\left(9-8-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) - \frac{N_e - K(\varphi_e)}{R} \right], \end{aligned}$$

где

$$p_1 = p \frac{\sin\left(2-1-\frac{\varepsilon_1}{3}\right)}{\sin\left(9-8-\frac{\varepsilon_1}{3}\right)}.$$

Проделав аналогичные вычисления для стороны cd , получим ее длину на референц-эллипсоиде

$$\begin{aligned} s_2 = p_2 + h_0 p_2 \left[\frac{1}{\rho''} (D_2-D_1) \operatorname{ctg}\left(2-1-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) - \frac{1}{\rho''} (D_9-D_8) \operatorname{ctg}\left(9-8-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho''} (D_5-D_4) \operatorname{ctg}\left(5-4-\frac{\varepsilon_2}{3}\right) - \frac{1}{\rho''} (D_{11}-D_{10}) \operatorname{ctg}\left(11-10-\frac{\varepsilon_2}{3}\right) - \frac{1}{R} \right] + \\ + p_2 \left[\frac{1}{\rho''} (L_2-L_1) \operatorname{ctg}\left(2-1-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) - \frac{1}{\rho''} (L_9-L_8) \operatorname{ctg}\left(9-8-\frac{\varepsilon_1}{3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho''} (L_5-L_4) \operatorname{ctg}\left(5-4-\frac{\varepsilon_2}{3}\right) - \frac{1}{\rho''} (L_{11}-L_{10}) \operatorname{ctg}\left(11-10-\frac{\varepsilon_2}{3}\right) - \right. \\ \left. - \frac{N_e + K(\varphi_e)}{R} \right], \end{aligned}$$

где

$$p_2 = p_1 \frac{\sin\left(5-4-\frac{\varepsilon_2}{3}\right)}{\sin\left(11-10-\frac{\varepsilon_2}{3}\right)}.$$

Сравнивая s_2 и s_1 , можем написать формулу для вычисления любой стороны ряда в функции h_0

$$s_n = p_n + w_n h_0 + l_n; \quad (9)$$

причем

$$\begin{aligned} w_n = p_n \left[\frac{1}{\rho''} \sum_1^n (\Delta D_I \operatorname{ctg} I - \Delta D_{II} \operatorname{ctg} II)_n - \frac{1}{R} \right]; \\ l_n = p_n \left[\frac{1}{\rho''} \sum_1^n (\Delta L_I \operatorname{ctg} I - \Delta L_{II} \operatorname{ctg} II)_n - \frac{N_e + K(\varphi_e)}{R} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

В этих формулах приняты следующие обозначения: p_n — длина стороны, проекция которой вычисляется, найденная по измеренным значениям базиса и углов; n — номер треугольника, совпадающий с номером стороны ходовой линии; I и II — углы в треугольнике, лежащие соответственно против определяемой и исходной стороны. Например, для стороны s_1

$$n=1; \quad I = \left(2 - 1 - \frac{\varepsilon_1}{3}\right); \quad II = \left(9 - 8 - \frac{\varepsilon_1}{3}\right);$$

$$\Delta D_I = D_2 - D_1; \quad \Delta D_{II} = D_9 - D_8; \quad \Delta L_I = L_2 - L_1; \quad \Delta L_{II} = L_9 - L_8.$$

Передача координат

Перейдем от измеренных в пункте b астрономических координат φ_b, λ_b и азимута α_{ba} к геодезическим координатам B_b, L_b и азимуту A_{ba}

$$\begin{aligned} B_b &= \varphi_b + u_b; \\ L_b &= \lambda_b + v_b \operatorname{sc} \varphi_b; \\ A_{ba} &= \alpha_{ba} + v_b \operatorname{tg} \varphi_b. \end{aligned} \quad (11)$$

Составляющие отклонения отвеса в пункте b в плоскости меридиана u_b и в плоскости первого вертикала v_b можем вычислить по формулам (10) работы [4], которые для нашего случая имеют вид

$$\begin{aligned} u_b &= -\xi_b - m_1 \sin 2\varphi_b - m_2 \sin 4\varphi_b; \\ v_b &= -\eta_b; \end{aligned} \quad (12)$$

где ξ_b и η_b — гравиметрические части составляющих уклонения отвеса, определяемые по формулам Вининг-Мейнеса.

Зная координаты пункта b , можем найти координаты следующего пункта c . При этом длина стороны bc , согласно (9), будет

$$s_1 = p_1 + ds_1,$$

где

$$ds_1 = w_1 h_0 + l_1, \quad (13)$$

а азимут bc с учетом (7) равен

$$A_{bc} = \bar{\alpha}_{bc} + dA_{bc}, \quad (14)$$

где

$$\bar{\alpha}_{bc} = \alpha_{ba} + (4-3),$$

$$dA_{bc} = v_b \operatorname{tg} \varphi_b + h_0 (D_4 - D_3) + (L_4 - L_3).$$

Поступаем следующим образом. По астрономическим координатам пункта b , азимуту $\bar{\alpha}_{bc}$ и длине p_1 из решения прямой геодезической задачи находим координаты $\bar{\varphi}_c, \bar{\lambda}_c$ и азимут α_{cb} . Тогда геодезические координаты пункта c и азимут стороны cb будут

$$\begin{aligned} B_c &= \bar{\varphi}_c + dB_c; \\ L_c &= \bar{\lambda}_c + dL_c; \\ A_{cb} &= \bar{\alpha}_{cb} + dA_{cb}. \end{aligned} \quad (15)$$

Поправки dB_c , dL_c и dA_{cb} вычисляем по дифференциальным формулам первого рода

$$\begin{aligned} dB_c &= \frac{\partial B_c}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial B_c}{\partial A_{bc}} dA_{bc} + \frac{\partial B_c}{\partial B_b} dB_b; \\ dL_c &= \frac{\partial L_c}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial L_c}{\partial A_{bc}} dA_{bc} + \frac{\partial L_c}{\partial B_b} dB_b + dL_b; \\ dA_{cb} &= \frac{\partial A_{cb}}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial A_{cb}}{\partial A_{bc}} dA_{bc} + \frac{\partial A_{cb}}{\partial B_b} dB_b. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (11) видно, что

$$\begin{aligned} dB_b &= u_b; \\ dL_b &= v_b \operatorname{sc} \varphi_b. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя значения ds_1 из (13) и dA_{bc} из (14), а также (17) в формулы (16) и группируя все члены с h_0 , получим

$$\begin{aligned} dB_c &= h_0 Q_c^B + T_c^B; \\ dL_c &= h_0 Q_c^L + T_c^L; \\ dA_{cb} &= h_0 Q_{cb}^A + T_{cb}^A; \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} Q_c^B &= \omega_1 \frac{\partial B_c}{\partial s_1} + (D_4 - D_3) \frac{\partial B_c}{\partial A_{bc}}; \\ Q_c^L &= \omega_1 \frac{\partial L_c}{\partial s_1} + (D_4 - D_3) \frac{\partial L_c}{\partial A_{bc}}; \\ Q_{cb}^A &= \omega_1 \frac{\partial A_{cb}}{\partial s_1} + (D_4 - D_3) \frac{\partial A_{cb}}{\partial A_{bc}}; \\ T_c^B &= l_1 \frac{\partial B_c}{\partial s_1} + (L_4 - L_3) \frac{\partial B_c}{\partial A_{bc}} + u_b \frac{\partial B_c}{\partial B_b} + v_b \operatorname{tg} \varphi_b \frac{\partial B_c}{\partial A_{bc}}; \\ T_c^L &= l_1 \frac{\partial L_c}{\partial s_1} + (L_4 - L_3) \frac{\partial L_c}{\partial A_{bc}} + u_b \frac{\partial L_c}{\partial B_b} + v_b \operatorname{tg} \varphi_b \left(\frac{\partial L_c}{\partial A_{bc}} + \operatorname{csc} \varphi_b \right); \\ T_{cb}^A &= l_1 \frac{\partial A_{cb}}{\partial s_1} + (L_4 - L_3) \frac{\partial A_{cb}}{\partial A_{bc}} + u_b \frac{\partial A_{cb}}{\partial B_b} + v_b \operatorname{tg} \varphi_b \frac{\partial A_{cb}}{\partial A_{bc}}. \end{aligned}$$

В формулах (18), справа, неизвестной величиной является только редуцированная постоянная h_0 . Величины $\frac{\partial B}{\partial s}$, $\frac{\partial B}{\partial A}$, $\frac{\partial B}{\partial B}$, $\frac{\partial L}{\partial s}$ и т. д. — известные коэффициенты дифференциальных формул [5]. Подставляя (18) в (15), найдем геодезические координаты пункта c и азимут стороны cb .

При определении пункта d длина стороны cd , подобно тому, как и при определении точки c , будет

$$s_2 = p_2 + ds_2,$$

где

$$ds_2 = \omega_2 h_0 + l_2;$$

но азимут ее запишется несколько иначе:

$$A_{cd} = \bar{\alpha}_{cd} + dA_{cd},$$

где

$$\bar{\alpha}_{cd} = \bar{\alpha}_{cb} - (8-7);$$

$$dA_{cd} = h_0 Q_{cd}^A + T_{cd}^A.$$

Причем

$$Q_{cd}^A = Q_{cb}^A - (D_8 - D_7);$$

$$T_{cd}^A = T_{cb}^A - (L_8 - L_7).$$

Выполнив аналогичные проделанным выше вычисления для пункта d и последующих, мы получим такие геодезические координаты и азимут в конечном пункте звена

$$B_n = \bar{\varphi}_n + h_0 Q_n^B + T_n^B;$$

$$L_n = \bar{\lambda}_n + h_0 Q_n^L + T_n^L; \quad (19)$$

$$A_{nm} = \bar{\alpha}_{nm} + h_0 Q_{nm}^A + T_{nm}^A.$$

Коэффициенты Q можно выразить формулами:

$$Q_n^B = \omega_{mn} \frac{\partial B_n}{\partial s_{mn}} + Q_{mn}^A \frac{\partial B_n}{\partial A_{mn}} + Q_m^B \frac{\partial B_n}{\partial B_m};$$

$$Q_n^L = \omega_{mn} \frac{\partial L_n}{\partial s_{mn}} + Q_{mn}^A \frac{\partial L_n}{\partial A_{mn}} + Q_m^B \frac{\partial L_n}{\partial B_m} + Q_n^L; \quad (20)$$

$$Q_{nm}^A = \omega_{mn} \frac{\partial A_{nm}}{\partial s_{mn}} + Q_{mn}^A \frac{\partial A_{nm}}{\partial A_{mn}} + Q_m^B \frac{\partial A_{nm}}{\partial B_m}.$$

Причем

$$Q_{mn}^A = Q_{m, m-1}^A \pm \Delta D_n.$$

Для получения коэффициентов T надо в (20) вместо Q с соответствующими значками поставить T , а вместо ω ввести l .

Формулы (19) и (20) справедливы для всех пунктов, начиная с d .

Определение h_0

Выше было показано определение геодезических координат и азимута в n -ом пункте звена как функции редукционной постоянной h_0 . Но те же координаты и азимут в пункте n мы можем вычислить по измеренным в нем астрономическим координатам φ_n , λ_n и азимуту α_{nm}

$$B_n = \varphi_n + u_n;$$

$$L_n = \lambda_n + v_n \operatorname{sc} \varphi_n; \quad (21)$$

$$A_{nm} = \alpha_{nm} + v_n \operatorname{tg} \varphi_n.$$

Получение B_n , L_n и A_{nm} двумя разными способами дает возможность составить уравнения для вычисления h_0 . Из сравнения (19) и (21) находим

$$h_0 Q_n^B = \varphi_n + u_n - \bar{\varphi}_n - T_n^B;$$

$$h_0 Q_n^L = \lambda_n + v_n \operatorname{sc} \varphi_n - \bar{\lambda}_n - T_n^L; \quad (22)$$

$$h_0 Q_{nm}^A = \alpha_{nm} + v_n \operatorname{tg} \varphi_n - \bar{\alpha}_{nm} - T_{nm}^A.$$

Третье из уравнений (22), азимутальное, как известно [5], является следствием долготного уравнения.

Таким образом, редуцированную постоянную h_0 можно определить по материалам астрономо-геодезической сети, составив для этого по всем звеньям широтное и долготное уравнения (22) и уравнив результаты по способу наименьших квадратов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Мигаль. К вопросу определения фигуры Земли без использования нормального гравитационного поля. Научные записки Львовского политехнического института, серия геодезическая, № 5, Львов, 1959.

2. Т. Н. Чалюк. Опыт применения теории Н. К. Мигалья к определению высот геоида и уклонов отвесных линий. Научные записки Львовского политехнического института, серия геодезическая, № 3, Львов, 1955.

3. Н. К. Мигаль. Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. Научные записки Львовского политехнического института, серия геодезическая, № 1. Львов, 1949.

4. Н. К. Мигаль. Относительно точности определения редуцированных постоянных, высот геоида и отклонений отвеса. Научные записки Львовского политехнического института, серия геодезическая, № 9, Львов, 1962.

5. Ф. Н. Красовский. Избранные сочинения, т. IV. Геодезиздат, 1955.

Работа поступила
26 сентября 1964 г.