

И. Ф. МОНИН

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФИГУРЫ И ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

В настоящей работе изложен вывод новых формул, определяющих фигуру и внешнее гравитационное поле Земли с погрешностью малых величин третьего порядка.

Как известно, зависимость между возмущающим потенциалом T , аномалиями силы тяжести Δg , потенциалом Земли на уровне моря W_0 и потенциалом уровенного эллипсоида на его поверхности U_0 выражается для любой точки внешнего пространства следующим образом:

$$2T + z \frac{\partial T}{\partial z} = -z \Delta g + 2(W_0 - U_0) = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(z^2 T), \quad (1)$$

где z — радиус-вектор фиксированной точки внешнего пространства.

Начало координат взято в центре отсчетного уровенного эллипсоида и совпадает с центром инерции Земли.

Представим гармоническую и регулярную в бесконечности функцию $\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(z^2 T)$ потенциалом простого слоя плотности μ , распределенного на близкой поверхности (в качестве близкой поверхности принимается поверхность, получаемая отложением от отсчетного эллипсоида вдоль его нормалей нормальных высот H). Получим

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(z^2 T) = \int \frac{\mu}{r_1} dS, \quad (2)$$

$$-a \Delta g + 2(W_0 - U_0) = \int \frac{\mu}{r} dS = G, \quad (3)$$

где

$$r_1^2 = z^2 + \rho^2 - 2z\rho \cos \phi, \quad (4)$$

ρ — радиус-вектор текущей точки близкой поверхности S ;

ϕ — угол между ρ и z (когда фиксированная точка находится на поверхности S , то $z = \rho_0$, $r_1 = r$);

a — большая полуось отсчетного эллипсоида.

Умножая обе части формулы (2) на $z dz$ и интегрируя по z в пределах от $z > \rho_0$ до $z \rightarrow \infty$, находим

$$(z^2 T)_z = \int \mu F_1 dS,$$

где

$$F_1 = \int_z^{\infty} \frac{z dz}{r_1} = \{r_1 + \rho \cos \psi \ln (r_1 + z - \rho \cos \psi)\}_z^{\infty}.$$

При больших значениях z

$$F_1 = z \left(1 + \frac{\rho^2}{z^2} - 2 \frac{\rho}{z} \cos \psi \right)^{1/2} + \rho \cos \psi \ln z \left\{ 1 + \left(1 + \frac{\rho^2}{z^2} - \frac{2\rho}{z} \cos \psi \right)^{1/2} - \frac{\rho}{z} \cos \psi \right\} \approx z - \rho \cos \psi + \rho \cos \psi \ln 2z.$$

Покажем, что при больших значениях z

$$z^2 T \approx z f \Delta M. \quad (5)$$

Действительно, для одной и той же точки внешнего пространства потенциалы притяжения Земли и урванного отсчетного эллипсоида равны

$$V_3 = \frac{f M_3}{z} + \frac{A}{z^3} + \dots, \quad V_9 = \frac{f M_9}{z} + \frac{B}{z^3} + \dots, \quad (6)$$

где M_3, M_9 — массы Земли и урванного отсчетного эллипсоида,

A, B — величины, зависящие от моментов инерции.

Согласно определению возмущающего потенциала, имеем

$$T = V_3 + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - V_9 - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = V_3 - V_9. \quad (7)$$

Обозначив $M_3 - M_9 = \Delta M$, из формул (6) и (7) получаем формулу (5).

Следовательно, значение возмущающего потенциала во внешнем пространстве определяется формулой

$$T = \frac{f \Delta M}{z} - \int \mu F dS, \quad (8)$$

где

$$F = \frac{1}{z} - \frac{\rho}{z^2} \cos \psi - \frac{r_1}{z^2} - \frac{\rho}{z^2} \cos \psi \ln \frac{z + r_1 - \rho \cos \psi}{2z};$$

$$\int \mu \rho \cos \psi dS = 0; \quad \int \mu dS = f \Delta M.$$

Плотность простого слоя μ определяется из интегрального уравнения (3). Найдем решение этого уравнения, применяя метод малого параметра [1]. Пусть

$$\mu = v \cos \alpha. \quad (9)$$

Замечая, что $\cos \alpha dS \approx d\Sigma$, где α — угол между ρ и нормалью поверхности S (угол наклона элемента dS), $d\Sigma$ — элемент поверхности сферы радиуса a , получаем

$$\int \frac{v}{r} d\Sigma = G. \quad (10)$$

Теперь преобразуем близкую поверхность S , вычисляя радиус-векторы по формуле:

$$\bar{\rho} = a + kH,$$

где k — малый постоянный параметр. Для преобразованной поверхности имеем

$$\int \frac{\bar{v}}{r} d\Sigma = \bar{G}. \quad (11)$$

Положив

$$\bar{v} = \sum_0^{\infty} k^m v_m, \quad \bar{G} = \sum_0^{\infty} k^m G_m,$$

и, зная, что

$$\bar{r}^2 \approx r_0^2 (1 + k^2 v_1^2),$$

где

$$\sum_0^{\infty} v_m = v, \quad \sum_0^{\infty} G_m = G,$$

$$r_0 = 2a \sin \frac{\psi}{2}, \quad v_1 = \frac{H - H_0}{r_0},$$

из формулы (11) получаем

$$\int \frac{v_m}{r_0} d\Sigma = t_m, \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (12)$$

где

$$t_0 = G_0,$$

$$t_1 = G_1,$$

$$t_2 = G_2 + \frac{1}{2} \int v_0 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0},$$

$$t_3 = G_3 + \frac{1}{2} \int v_1 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0},$$

$$t_4 = G_4 + \frac{1}{2} \int v_2 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0} - \frac{3}{8} \int v_0 v_1^4 \frac{d\Sigma}{r_0}, \text{ и т. д.}$$

Будем искать решение уравнения (12) в виде бесконечного ряда сферических функций

$$v_m = \sum_{n=0}^{\infty} (v_m)_n. \quad (13)$$

Тогда, полагая, что и правая часть уравнения (12) может быть разложена в бесконечный ряд сферических функций, из уравнения (12) находим зависимость между сферическими функциями n -го порядка

$$(v_m)_n = \frac{2n+1}{4\pi a} (t_m)_n.$$

Стало быть, решение уравнения (12) есть

$$v_m = \frac{1}{(4\pi a)^2 a} \int (t'_m - t_m) F_2 d\Sigma + \frac{t_m}{4\pi a}, \quad (14)$$

где

$$F_2 = \sum_0^{\infty} (2n+1)^2 P_n(\cos \psi),$$

t'_m, t_m — значения функции в текущей и фиксированной точках поверхности S .

Входящий в формулу (14) бесконечный ряд можно просуммировать. Известно [1], что

$$\sum_0^{\infty} (2n+1)(n+1) P_n(\cos \psi) = -\frac{2a^3}{r_0^3},$$

$$\sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \psi) = 0,$$

$$\sum_0^{\infty} P_n(\cos \psi) = \frac{a}{r_0}.$$

Используя эти равенства, получим

$$F_2 = -\frac{4a^3}{r_0^3}. \quad (15)$$

Итак, окончательно функции $v_0, v_1, \dots$ определяются по формуле

$$v_m = -\frac{1}{4\pi^2} \int (t'_m - t_m) \frac{d\Sigma}{r_0^3} + \frac{t_m}{4\pi a}, \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (16)$$

или

$$v = -\frac{a}{4\pi^2} \int (\delta g' - \delta g) \frac{d\Sigma}{r_0^3} + \frac{\delta g}{4\pi}, \quad (17)$$

где

$$\delta g = -\Delta g + \frac{2}{a} (W_0 - U_0) + \frac{1}{2a} \int v_0 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0} + \frac{1}{2a} \int v_1 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0} + \dots$$

Несмотря на то, что нормальное значение силы тяжести γ относится к поверхности S , которая при решении уравнения (3) преобразуется, можно положить

$$G_0 = -a(g - \gamma_0) + 2(W_0 - U_0),$$

$$\gamma = \gamma_0 + H \frac{\partial \gamma_0}{\partial v} + \frac{H^2}{2} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial v^2},$$

$$G_1 = G_2 = 0,$$

$$G_3 = G_4 = \dots = G_m = 0,$$

где $\gamma_0, \frac{\partial \gamma_0}{\partial v}, \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial v^2}$ относятся к поверхности уровня эллипсоида; v — направление его внешней нормали.

Для определения аномалий силы тяжести и уклонений отвеса во внешнем пространстве найдем $\frac{\partial T}{\partial z}$ и $\frac{\partial T}{\partial x}$, где x — направление, параллельное касательной к меридиональному эллипсу в фиксированной точке.

Мы имеем

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{f\Delta M}{z^2} \int \mu \left(-\frac{1}{z^2} + \frac{3\rho}{z^3} \cos \psi - \frac{1}{r_1 z} + \frac{2r_1}{z^3} + \frac{2\rho}{z^3} \cos \psi \ln \frac{z+r_1-\rho \cos \psi}{2z} \right) dS, \quad (18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \int \mu \left\{ \ln \frac{z+r_1-\rho \cos \psi}{2z} - \frac{1}{r_1} \cdot \frac{z^2-r_1^2+2\rho r_1 \cos \psi}{z+r_1-\rho \cos \psi} \right\} \frac{\rho}{z^3} \sin \psi \cos A dS, \quad (19)$$

где A — азимут элемента dS .

Из уравнения (1) с учетом (8), (2) и (18) получаем формулу, определяющую аномалию силы тяжести во внешнем пространстве

$$\begin{aligned} \Delta g = & -\frac{f\Delta M}{z^2} + \frac{2}{z} (W_0 - U_0) + \frac{1}{z} \int \mu \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{r_1} + \frac{\rho}{z^2} \cos \psi \right) dS = \\ = & + \frac{2}{z} (W_0 - U_0) - \frac{1}{z} \int \frac{\mu}{r_1} dS; \quad f\Delta M = \int \mu dS. \end{aligned} \quad (20)$$

Дифференцированием по z формулы (20) находим вертикальный аномальный градиент силы тяжести тоже во внешнем пространстве

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta g}{\partial z} = & \frac{2f\Delta M}{z^3} - \frac{2}{z^2} (W_0 - U_0) + \frac{1}{z} \int \mu \left(\frac{-2}{z^2} + \frac{1}{r_1 z} + \right. \\ & \left. + \frac{z-\rho \cos \psi}{r_1^3} - \frac{3\rho}{z^3} \cos \psi \right) dS = \frac{-2}{z^2} (W_0 - U_0) + \\ & + \frac{1}{z} \int \mu \left(\frac{1}{r_1 z} + \frac{z-\rho \cos \psi}{r_1^3} \right) dS. \end{aligned} \quad (21)$$

Формулу для определения высот квазигеоида ζ легко получить из формулы (8). Положив в ней $z = \rho_0$, $r_1 = r$, найдем возмущающий потенциал на поверхности S . Принимая во внимание, что на поверхности S

$$T = g_e \zeta + W_0 - U_0, \quad (22)$$

получим

$$g_e \zeta + W_0 - U_0 = \frac{f\Delta M}{\rho_0} - \int \mu F^* dS, \quad (23)$$

где

$$F^* = (F)_{z=\rho_0, r_1=r}; \quad \int \mu \rho \cos \psi dS = 0.$$

Составляющая уклонения отвеса в меридиане ξ и аномалия вертикального градиента силы тяжести $\frac{\partial \Delta g}{\partial \nu}$ на поверхности S определяются по формулам

$$\xi = \frac{1}{g_e \rho_0^3} \int \mu \left[\frac{\rho}{r} \cdot \frac{\rho_0^2 - r^2 + 2\rho r \cos \psi}{\rho_0 + r - \rho \cos \psi} - \rho \ln \frac{\rho_0 + r - \rho \cos \psi}{2\rho_0} \right] \sin \psi \cos \alpha dS, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta g}{\partial z} = \frac{2f\Delta M}{\rho_0^3} - \frac{2}{\rho_0^2} (W_0 - U_0) + \frac{2\pi}{\rho_0} \mu \cos \alpha + \frac{1}{\rho_0} \int \mu \left(-\frac{2}{\rho_0^2} + \frac{1}{r\rho_0} - \frac{3\rho}{\rho_0^3} \cos \psi + \right. \\ \left. + \frac{\rho_0 - \rho \cos \psi}{r^3} \right) dS = \frac{-2}{\rho_0^2} (W_0 - U_0) + \frac{2\pi}{\rho_0} \mu \cos \alpha + \\ + \frac{1}{\rho_0} \int \mu \left(\frac{1}{r\rho_0} + \frac{\rho_0 - \rho \cos \psi}{r^3} \right) dS. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, при помощи формул (23), (24), (17) и (16) определяется фигура физической поверхности Земли. Формулы (8), (20), (21) и (19) позволяют определять внешнее гравитационное поле Земли.

Если в качестве отсчетного эллипсоида принять референц-эллипсоид, то формулы (24) и (23) изменятся [3]:

$$\xi' = \xi + (x_0 \cos L + y_0 \sin L) \cos \Phi + z_0 \sin \Phi, \quad (26)$$

$$\xi' = \xi + (x_0 \cos L + y_0 \sin L) \frac{\sin \Phi}{a} - \frac{z_0}{a} \cos \Phi, \quad (27)$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты центра инерции Земли.

Соответственно изменятся и формулы (8), (19) и т. д.

Отметим, что при практическом использовании полученных здесь формул подынтегральные выражения в некоторых из них следует упростить, сохранив только величины второго порядка.

В заключение из формул (8) и (23) получим известные формулы. Для этого в формулах (8) и (10) положим $\rho = \rho_0 = a$.

Имеем

$$T = \frac{f\Delta M}{z} - \int \mu F d\Sigma, \quad (28)$$

$$F = \frac{1}{z} - \frac{a}{z^2} \cos \psi - \frac{r_1}{z^2} - \frac{a}{z^2} \cos \psi \ln \frac{z + r_1 - a \cos \psi}{2z} \quad (29)$$

$$\int \frac{\mu}{r_0} a \Sigma = G. \quad (30)$$

Разложив функцию F в ряд полиномов Лежандра (см. [1, стр. 59]), получим

$$F = \sum_2^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{n-1}. \quad (31)$$

Разложив функцию G в бесконечный ряд сферических функций, из формулы (30) найдем

$$\int \mu P_n(\cos \psi) d\Sigma = a G_n, \quad (32)$$

где G_n — сферическая функция порядка n в разложении G .

Следовательно, в формуле (28)

$$\begin{aligned} \int \mu F d\Sigma &= \sum_2^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \int \mu P_n(\cos \psi) d\Sigma = \\ &= \sum_2^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^{n+1} \cdot \frac{G_n}{n-1} = \frac{1}{4\pi a} \int G \sum_2^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) d\Sigma, \end{aligned}$$

и мы приходим к обобщенной формуле Стокса в случае неравенства масс и потенциалов геоида и уровненного отсчетного эллипсоида:

$$T = \frac{f\Delta M}{z} + \frac{1}{4\pi a} \int \Delta g S(z, \psi) d\Sigma. \quad (33)$$

Величину $f\Delta M$ при этом можно выразить через $W_0 - U_0$ и Δg :

$$f\Delta M = 2a(W_0 - U_0) - \frac{1}{4\pi} \int \Delta g d\Sigma. \quad (34)$$

В самом деле, из формул (6), (7) и (22) следует, что сферическая функция нулевого порядка в разложении возмущающего потенциала равна

$$T_0 = \frac{f\Delta M}{a} = g_e \zeta_0 + W_0 - U_0.$$

Учитывая соотношение между сферическими функциями нулевого порядка для высот геоида ζ_0 и аномалий силы тяжести Δg_0 [4]

$$g_e \zeta_0 = W_0 - U_0 - a\Delta g_0,$$

а также теорему восстановления сферических функций

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi a^2} \int \Delta g P_n(\cos \psi) d\Sigma,$$

легко получаем формулу (34).

Точно так же из формулы (23) вытекают известные формулы Стокса и Пицетти.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Молоденский и др. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли, Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, 1960.
2. И. Ф. Монин. О вычислении уклонений отвеса. Астрономический журнал, вып. 1, 4, 1963.
3. И. Ф. Монин. Еще об изучении регуляризованного геоида без использования нормального поля. Геодезия и картография, № 11, 1962.
4. И. Ф. Монин. К определению фигуры регуляризованного геоида. Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 5, 1960.

Работа поступила
17 ноября 1964 г.