

Г. С. ТАРАЗЕВИЧ

ДВА АЛГОРИТМА УРАВНОВЕШИВАНИЯ СЕТЕЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ НА ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

В основу предлагаемых ниже алгоритмов уравнивания сетей трилатерации взят метод посредственных измерений, а в качестве неизвестных, отыскиваемых из уравнивания, приняты координаты определяемых пунктов, приближенные значения которых известны.

Задача решается методом последовательных приближений. Неизвестные улучшаются по группам, в каждую из которых входит две неизвестные величины — абсцисса и ордината одного из определяемых пунктов.

При улучшении любой группы неизвестных в данном приближении определяемыми считаются неизвестные только улучшаемой группы; значения всех остальных неизвестных временно принимаются неизменяемыми.

Улучшение неизвестных каждого определяемого пункта во всех приближениях производится выполнением одинаковых вычислительных операций. В зависимости от того, какие формулы при этом применяются, будем рассматривать два алгоритма: алгоритм А и алгоритм Б.

Алгоритм А. Увеличение неизвестных пункта К в алгоритме А производится по следующей схеме:

1. Составление уравнений погрешностей для всех сторон, измеренных с пункта К. При этом координаты окружающих пунктов считаются жесткими. Свободные члены уравнений погрешностей вычисляются по координатам пункта К и окружающих пунктов, полученных в результате всех предыдущих улучшений. В приводимых ниже формулах такие координаты и свободные члены уравнений погрешностей отмечены индексом «ул».

Уравнение погрешностей для измеренной стороны имеет вид:

$$v_{kl} = a_{kl} \delta x_k + b_{kl} \delta y_k + l_{kl}^{\text{ул}}, \quad (1)$$

где

$$a_{kl} = \frac{x_k^{\text{ул}} - x_l}{S_{kl}}, \quad b_{kl} = \frac{y_k^{\text{ул}} - y_l}{S_{kl}}, \quad (2)$$

$$l_{kl}^{\text{ул}} = \sqrt{(x_k^{\text{ул}} - x_l^{\text{ул}})^2 + (y_k^{\text{ул}} - y_l^{\text{ул}})^2} - S_{kl}^{\text{изм}}, \quad (3)$$

$S_{kl}^{\text{изм}}$ — измеренное значение стороны kl .

Уравнению (1) при неравноточных измерениях устанавливается вес P_{kl} .

Если пункт K является одним из концов стороны с измеренным дирекционным углом (азимутом), то к системе уравнений погрешностей сторон пункта K присоединяется уравнение погрешностей дирекционного угла с весом P_a :

$$v_{a_{kl}} = A_{kl} \delta x_k + B_{ki} \delta y_k + l_{ki}' \quad (4)$$

где

$$A_{kl} = -\rho'' \frac{b_{kl}}{s_{kl}}, \quad B_{ki} = \rho'' \frac{a_{ki}}{s_{ki}}, \quad l_{ki}' = \operatorname{arctg} \frac{y_i^{yl} - y_k^{yl}}{x_i^{yl} - x_k^{yl}} - \alpha_{ki}^{изм}, \quad (5)$$

$\alpha_{kl}^{изм}$ — измеренное значение дирекционного угла стороны kl .

2. Составление двух нормальных уравнений по уравнениям погрешностей (1) и (4):

$$\begin{cases} [Paa] \delta x_k + [Pab] \delta y_k + [Pal^{yl}] = 0, \\ [Pab] \delta x_k + [Pbb] \delta y_k + [Pbl^{yl}] = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где a и b — коэффициенты уравнений погрешностей соответственно при поправках δx_k и δy_k .

3. Решение нормальных уравнений (6)

$$\delta x_k = \frac{[Pbl^{yl}][Pab] - [Pal^{yl}][Pbb]}{[Pab]^2 - [Paa][Pbb]}, \quad \delta y_k = \frac{[Pal^{yl}][Pab] - [Pbl^{yl}][Paa]}{[Pab]^2 - [Paa][Pbb]} \quad (7)$$

и исправление координат пункта K очередными поправками δx_k и δy_k . Приближения заканчиваются, когда δx и δy всех определяемых пунктов окажутся меньше определенной наперед заданной величины.

При реализации алгоритма A на электронных вычислительных машинах (ЭВМ) в оперативной памяти машины необходимо постоянно хранить: координаты исходных и определяемых пунктов и информацию о схеме сети, позволяющую в процессе приближений определять связи пунктов. С измеренными величинами можно поступать двояко: или их все также постоянно хранить в оперативной памяти машины, или же вводить их туда в каждом приближении определенными группами.

В первом случае количество постоянно хранящейся информации в оперативной памяти машины сильно увеличивается, что является главным фактором, ограничивающим размеры уравниваемой сети. Во втором случае значительно увеличивается машинное время на решение задачи.

В связи с этим рекомендуется алгоритм A применять для уравнивания сетей трилатерации небольших размеров, то есть таких, размеры которых позволяют постоянно хранить в оперативной памяти машины все измеренные величины.

В противном случае выгоднее воспользоваться алгоритмом, который рассматривается ниже.

Алгоритм Б. Пусть в оперативную память машины введены координаты исходных пунктов и приближенные координаты определяемых пунктов, а также информация о схеме сети.

Далее, используя выражения (2) и (3) и вводя в оперативную память машины определенными группами измеренные величины, вычис-

ляются и записываются в оперативную память свободные члены нормальных уравнений (6) для всех определяемых пунктов.

Понятно, что при улучшении неизвестных пункта K вычисляются очередные поправки в координаты пункта K (7), обращаются в нуль свободные члены нормальных уравнений (6) пункта K и изменяются свободные члены нормальных уравнений пунктов i , непосредственно связанных с пунктом K измерениями.

Если пункт K и пункт i связывает только измеренная сторона, то изменения свободных членов нормальных уравнений пункта i выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Delta [Pal^{y^l}]_i^k &= -P_{ki} a_{kl}^2 \delta x_k - P_{ki} a_{ki} b_{kl} \delta y_k, \\ \Delta [Pbl^{y^l}]_i^k &= -P_{ki} a_{ki} b_{kl} \delta x_k - P_{ki} b_{kl}^2 \delta y_k. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Если же кроме измеренной стороны пункт K с пунктом i связывает еще и измеренный дирекционный угол (азимут), то формулы (8) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta [Pal^{y^l}]_i^k &= - (P_{ki} a_{kl}^2 + P_a A_{ki}^2) \delta x_k - (P_{ki} a_{ki} b_{kl} + P_a A_{ki} B_{kl}) \delta y_k, \\ \Delta [Pbl^{y^l}]_i^k &= - (P_{ki} a_{ki} b_{kl} + P_a A_{ki} B_{kl}) \delta x_k - (P_{ki} b_{kl}^2 + P_a B_{ki}^2) \delta y_k. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Отсюда порядок улучшения неизвестных пункта K будет:

1. Вычисление коэффициентов уравнений погрешностей (1) и (4) и коэффициентов нормальных уравнений (6).

2. Вычисление очередных поправок δx_k и δy_k по формулам (7) и исправление ими координат пункта K .

3. Вычисление коэффициентов выражений (8) и (9) и поправок $\Delta [Pal^{y^l}]_i^k$ и $\Delta [Pbl^{y^l}]_i^k$. Исправление свободных членов нормальных уравнений окружающих пунктов.

При этом в оперативной памяти машины необходимо постоянно хранить координаты исходных и определяемых пунктов, информацию о схеме сети и свободные члены нормальных уравнений всех определяемых пунктов.

Контроль вычислений в алгоритме B можно производить, периодически вводя в оперативную память машины измеренные величины и с помощью их перевычисляя свободные члены нормальных уравнений, одновременно сравнивая последние с соответствующими им величинами, хранящимися в оперативной памяти электронной вычислительной машины.

Алгоритм B позволяет производить уравнивание больших сетей трилатерации без обращения к внешней памяти машины. Даже на ЭВМ «Урал-1» по алгоритму B можно уравнивать сеть, содержащую около 100 пунктов (исходных и определяемых). ЭВМ «Урал-2» и «БЭСМ-2» позволяют увеличивать размеры уравниваемой сети примерно до 250 пунктов.

Иногда имеет смысл одновременно с выполнением первого приближения переписать коэффициенты нормальных уравнений (6) и коэффициенты выражений (8) и (9) во внешние запоминающие устройства и при выполнении последующих приближений вызывать их в оперативную память. Это выгодно, когда на поиск и вызов этих коэффициентов будет затрачиваться меньше машинного времени, чем на их новое вычисление.

Вероятнейшие поправки в измеренные величины в алгоритме *A* и алгоритме *B* вычисляются по формулам (1), (3), (4) и (5), считая $\delta x_k = \delta y_k = 0$.

Оба алгоритма соответствуют строгому уравниванию по методу посредственных измерений, когда нормальные уравнения решаются последовательными приближениями способом Гаусса—Зайделя.

Достоинства рассмотренных алгоритмов следующие: а) простота и универсальность; б) строгость решения задачи; в) возможность уравнивания больших сетей с использованием только оперативной памяти машины; г) отсутствие необходимости составления полной системы нормальных уравнений и хранения ее в памяти машины.

Работа поступила
10 февраля 1966 г.
