Н. Н. ОРЕЛ

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ В УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

В статье излагаются удобные для вычислений алгорифмы обращения нормальных уравнений по схеме Гаусса и по схеме квадратных корней, делаются обобщения.

1. Если справа матрицы A системы нормальных уравнений приписать единичную матрицу E, преобразовать полученную прямоугольную матрицу $\|AE\|$ по способу Гаусса, то одновременно получим две треугольные матрицы:

$$B=\begin{Vmatrix} 1 & \frac{[ab]}{[aa]} & \frac{[ac]}{[aa]} & \dots \\ 0 & 1 & \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} \text{ и } N=\begin{Vmatrix} n_{11} & 0 & 0 & \dots \\ n_{21} & n_{22} & 0 & \dots \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} \tag{1}$$

Указанное преобразование эквивалентно умножению каждой из матриц A и E слева на нижнюю треугольную матрицу N, т. е.

$$NA=B, \tag{2}$$

$$NE=N. \tag{3}$$

Таким образом, элиминационная матрица N, полученная в результате преобразования единичной матрицы E, одновременно является матрицей, преобразующей матрицу A нормальных уравнений в ее элиминационную B.

Матрица A у нас неособенная. Из формулы (2) следует:

$$A^{-1}=B^{-1}N. \tag{4}$$

С другой стороны, простым перемножением матриц можно убедиться в справедливости равенства

$$A=B'C, \tag{5}$$

где C — верхняя треугольная матрица коэффициентов преобразованной системы нормальных уравнений [4, стр. 128].

Равенство (5) можно представить в виде:

$$A=B'DB, \tag{6}$$

где $D=\{[ab], [bb.1], [cc.2], \ldots\}$ — диагональная матрица квадратичных коэффициентов преобразованной системы уравнений.

Из (6) следует:

$$A^{-1}=B^{-1}D^{-1}B'^{-1}. \tag{7}$$

Сопоставление же (4) и (7) дает:

$$N=D^{-1}B'^{-1}. \tag{8}$$

Отсюда

$$B^{-1}=N'D. \tag{9}$$

Нетрудно заключить, что при умножении нижней треугольной матрицы N слева на диагональную матрицу D получим нижнюю треугольную с единицами на главной диагонали матрицу, составленную из преобразованных строк матрицы E. Обозначим эту матрицу через R; тогда будем иметь:

$$DN=R. \tag{10}$$

Равенства (9) и (10) дают:

$$B^{-1}=R'. \tag{11}$$

После подстановки (11) в (4) получим окончательное выражение обратной матрицы $A^{-1}=T$ нормальных уравнений в виде произведений двух указанных выше треугольных матриц:

$$T=R'N. \tag{12}$$

Формулу (12) представим так:

$$T=R\circ N \tag{13}$$

или в развернутом виде

$$T=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ r_{21} & 1 & 0 & \ldots \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} n_{11} & 0 & 0 & \ldots \\ n_{21} & n_{22} & 0 & \ldots \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}, \tag{13а}$$

где знак $\circ$ показывает, что перемножение матриц здесь выполняется по столбцам [2, стр. 83].

Для практических целей матрицу (13 а) удобно представить в следующей векторной форме (при записи только диагональных и наддиагональных элементов):

$$T=\begin{Vmatrix} (\mathbf{r}_{.1}, \mathbf{n}_{.1}) & (\mathbf{r}_{.1}, \mathbf{n}_{.2}) & (\mathbf{r}_{.1}, \mathbf{n}_{.3}) \ldots \\ & (\mathbf{r}_{.2}, \mathbf{n}_{.2}) & (\mathbf{r}_{.2}, \mathbf{n}_{.3}) \ldots \\ & & (\mathbf{r}_{.3}, \mathbf{n}_{.3}) \ldots \\ & & \ldots \end{Vmatrix}, \tag{13б}$$

элементы которой представлены в виде скалярных произведений следующих векторов — столбцов матриц R и N:

$$r_{.1}=(1,\ r_{21},\ r_{31}, \ldots), \qquad r_{.2}=(0,\ 1,\ r_{32}, \ldots), \ldots$$

$$n_{.1}=(n_{11},\ n_{21},\ n_{31}, \ldots), \qquad n_{.2}=(0,\ n_{22},\ n_{32}, \ldots), \ldots$$

В схеме Гаусса, как известно, строки матрицы N расположены под соответствующими строками матрицы R. Очевидно, для того чтобы расположение строк этих матриц соответствовало формуле (13 а) мож-

но первую матрицу переписать на строки второй, справа преобразованной матрицы E.

Однако на практике целесообразно вычислять обратную матрицу T непосредственно по схеме преобразованной матрицы E и пользоваться формулой (13 б). В этом случае необходимо учесть, что компоненты векторов—столбцов матрицы N смещены вниз на одну строку по отношению к соответствующим компонентам векторов—столбцов матрицы R [3].

Следует отметить, что формулы (10) и (12) позволяют дать иное выражение для обратной матрицы [1], а именно:

$$T = N'DN. \tag{14}$$

Но эта формула менее эффективна по сравнению с формулой (12), так как требует перемножения трех матриц (а при переходе к формулам в обычной записи — вычисления сумм произведений трех элементов). Однако она имеет определенное теоретическое значение, так как позволяет сделать более глубокое обобщение разбираемых в статье алгорифмов обращения матрицы A.

2. Если прямоугольную матрицу $\|AE\|$ преобразовать по способу квадратных корней, то одновременно получим следующие треугольные матрицы:

$$S = \begin{Vmatrix} \sqrt{[aa]} & \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} & \dots \\ 0 & \sqrt{[bb\cdot 1]} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} \text{ и } M = \begin{Vmatrix} m_{11} & 0 & \dots \\ m_{21} & m_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}. \tag{15}$$

Преобразования (15), как известно, вытекают из равенства

$$A = S'S. \tag{16}$$

Формула же, аналогичная (4), здесь получит выражение:

$$A^{-1} = S^{-1}M. \tag{17}$$

Сопоставление обращенного выражения (16) с формулой (17) дает:

$$S^{-1} = M'. \tag{18}$$

На основании (17) и (18) обратная матрица T нормальных уравнений получит следующее окончательное выражение:

$$T = M'M. \tag{19}$$

Формула (19) позволяет вычислять обратную матрицу T фактически по векторам—столбцам только одной матрицы M, а именно:

$$T = \begin{Vmatrix} (\mathbf{m}_{\cdot 1}, \mathbf{m}_{\cdot 1}) & (\mathbf{m}_{\cdot 1}, \mathbf{m}_{\cdot 2}) & (\mathbf{m}_{\cdot 1}, \mathbf{m}_{\cdot 3}) \dots \\ & (\mathbf{m}_{\cdot 2}, \mathbf{m}_{\cdot 2}) & (\mathbf{m}_{\cdot 2}, \mathbf{m}_{\cdot 3}) \dots \\ & & (\mathbf{m}_{\cdot 3}, \mathbf{m}_{\cdot 3}) \dots \\ & & \dots \end{Vmatrix}. \tag{20}$$

В (20) выписаны только диагональные и наддиагональные элементы симметричной матрицы T.

3. Ниже устанавливается зависимость между соответствующими формулами изложенных выше алгорифмов обращения матрицы нормальных уравнений.

а) Из сопоставления первых из формул (1) и (15) имеем:

$$S = \Delta B, \tag{21}$$

где $\Delta=\{\sqrt{[aa]}, \sqrt{[bb\cdot 1]}, \sqrt{[cc\cdot 2]}, \ldots\}$ — диагональная матрица квадратных корней из квадратичных коэффициентов схемы Гаусса.

Таким образом, треугольная матрица S алгорифма квадратных корней равна элиминационной треугольной матрице B алгорифма Гаусса, умноженной по строкам на корни квадратные из соответствующих квадратичных коэффициентов.

Из (21) получаем формулу:

$$B=\Delta^{-1}S, \tag{22}$$

позволяющую осуществить обратный переход от матрицы S к матрице B.

б) Подставив выражение (22) в (6), легко перейти от разложения матрицы A нормальных уравнений на треугольные по алгорифму Гаусса к разложению (16) по способу корней и, наоборот, с помощью формулы (21) можно перейти от разложения (16) к разложению (6), а следовательно, и к (5).

в) Формулы (21) и (22) дают возможность установить зависимость и между обратными матрицами S^{-1} и B^{-1}, а именно:

$$S^{-1}=B^{-1}\Delta^{-1} \tag{23}$$

и, наоборот:

$$B^{-1}=S^{-1}\Delta. \tag{24}$$

г) На основании (23) и (18) имеем:

$$M=\Delta^{-1}B'^{-1}. \tag{25}$$

Но из формулы (9) следует:

$$B'^{-1}=DN. \tag{26}$$

Поэтому

$$M=\Delta^{-1}DN. \tag{27}$$

Но, очевидно,

$$\Delta^{-1}D=\Delta. \tag{28}$$

Следовательно, окончательно:

$$M=\Delta N \tag{29}$$

и, наоборот,

$$N=\Delta^{-1}M. \tag{30}$$

Формула (29) дает выражение нижней треугольной матрицы M алгорифма квадратных корней через нижнюю треугольную матрицу N алгорифма Гаусса. Равенство же (30) выражает обратную зависимость.

Интересно здесь отметить закономерную аналогию между формулами (21), (22) и (29), (30).

д) Формулы (29) и (30) позволяют легко переходить от выражения обратной матрицы T нормальных уравнений в алгорифме Гаусса к выражению ее в алгорифме квадратных корней и наоборот. В самом деле, при подстановке (30) в формулу (14) будем иметь:

$$T=M'\Delta^{-1}D\Delta^{-1}M. \tag{31}$$

Приняв во внимание, что $\Delta^{-1}D\Delta^{-1}=E$, получим формулу (19).

Наоборот, при подстановке (29) в формулу (19) найдем, что

$$T=N'\Delta\Delta N. \tag{32}$$

При подстановке в (32) $D=\Delta\Delta$ получим выражение (14).

ВЫВОДЫ

1. В статье изложены алгорифмы, позволяющие обращать матрицу нормальных уравнений на завершающем этапе вычислений по элементам треугольных матриц без непосредственного обращения последних. Из них более эффективным является алгорифм обращения по схеме корней — он допускает большую механизацию вычислительного процесса, требует меньшего количества действий и записей результатов промежуточных вычислений, замедляет накопление ошибок округления и, следовательно, дает более точные окончательные результаты.

2. Установлена зависимость между алгорифмами на всех этапах вычислительного процесса. Это обстоятельство позволяет считать один из них, скажем алгорифм Гаусса, основным и на любом этапе вычислений непосредственно перейти к формулам алгорифма корней. В частности, очевидно, можно не выводить отдельно формулу (19) для обращения матрицы по алгорифму квадратных корней, как это сделано в пункте 2, а вывести ее непосредственно из формулы (14), как показано в пункте 3, *д*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Г. Гантмахер. Теория матриц. Гостехиздат, М., 1953.
2. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.
3. Н. Н. Орел. К вопросу обработки результатов посредственных измерений. Маркшейдерское дело, вып. IV. Металлургиздат, М., 1956 г.
4. П. И. Шилов. Способ наименьших квадратов. Геодезиздат, М., 1941 г.

Работа поступила
7 сентября 1964 г.