МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 5

В. Д. ШИПУЛИН

ОШИБКА НАПРАВЛЕНИЯ ЛИНИИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

На плоскости погрешность в направлении линии определяется перпендикулярным заданному направлению радиус-вектором подеры эллипса ошибок, что достаточно хорошо исследовано. Однако в применении к нашему физическому трехмерному пространству этот вопрос не имеет какого-либо освещения. Решение вопроса ошибки в направлении линии в пространстве представляет не только теоретический интерес, но может быть использовано и в ряде случаев геодезической практики.

Отметим прежде, что погрешность положения пункта, определенного пространственной засечкой, наиболее полно описывается тензором M_r^2 второго ранга, называемого тензором квадратов ошибок координат [1]. Тензор M_r^2 может быть приведен к такой системе декартовых координат σ, τ, γ, у которой одна из осей, например с ортом $\bar{\sigma}$, коллинеарна с интересующей нас линией F, так что матрица его компонентов представится в следующем виде:

$$\|M_r^2\| = m^2 \begin{Vmatrix} Q_{\sigma\sigma} & Q_{\sigma\tau} & Q_{\sigma\gamma} \\ Q_{\sigma\tau} & Q_{\tau\tau} & Q_{\tau\gamma} \\ Q_{\sigma\gamma} & Q_{\tau\gamma} & Q_{\gamma\gamma} \end{Vmatrix} = m^2 \|\Pi^{-1}\|. \tag{1}$$

Тогда ошибка положения точки по направлению $\bar{\sigma}$ есть компонент

$$m_\sigma^2 = m^2 Q_{\sigma\sigma}. \tag{2}$$

Очевидно также, что диагональные компоненты

$$m_\tau^2 = m^2 Q_{\tau\tau} \quad m_\gamma^2 = m^2 Q_{\gamma\gamma} \tag{3}$$

представляют собой ошибки положения точки по направлениям $\bar{\tau}$ и $\bar{\gamma}$, перпендикулярным к $\bar{\sigma}$.

Именно ошибки по этим направлениям привлекают наше внимание, так как они позволяют характеризовать погрешность в направлении линии F следующим образом:

$$m^{\bullet}_{F\tau} = \pm \frac{m_\tau}{s_F}\rho'', \quad m^{\bullet}_{F\gamma} = \pm \frac{m_\gamma}{s_F}\rho''. \tag{4}$$

Уже сейчас становится ясным, что ошибка в направлении линии в трехмерном пространстве имеет более сложный характер по сравнению с этой ошибкой в двухмерном пространстве. Чтобы иметь геометрический образ погрешности в направлении линии, достаточно вспомнить, что распределение ошибок положения точки по направлениям характеризуется подерной поверхностью эллипсоида ошибок. Сечение этой поверхности координатной плоскостью $\tau O \nu$ образует подеру эллипса. Следовательно, величины (3) изменяются с изменением положения осей τ и ν при неизменной σ, и поэтому выражения (4) не могут полно характеризовать ошибку в направлении линии.

К исчерпывающему представлению ошибки в направлении линии приводит плоский тензор с матрицей компонентов

$$\|M^2_{r_{\tau\nu}}\| = m^2 \begin{Vmatrix} Q_{\tau\tau} & Q_{\tau\nu} \\ Q_{\tau\nu} & Q_{\nu\nu} \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

выделенной из (1), который представляет собой квадрат ошибки положения точки в плоскости $\tau O \nu$. Если этот тензор умножить на скаляр $s_F^{-2}(\rho'')^2$ то, согласно (4), получим тензор $M^2_{F''}$ с матрицей компонентов

$$\|M^2_{F''}\| = \frac{m^2}{s_F^2}(\rho'')^2 \begin{Vmatrix} Q_{\tau\tau} & Q_{\tau\nu} \\ Q_{\tau\nu} & Q_{\nu\nu} \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Сопоставляя компоненты матрицы (6) с (4), приходим к заключению, что квадрат средней квадратической ошибки в направлении линии в пространстве представляет собой плоский тензор $M^2_{F''}$ квадратов угловых ошибок.

Тензор $M^2_{F''}$ позволяет получить экстремальные значения ошибок в направлении линии, определяя его главные оси. Для этого необходимо решить характеристическое уравнение матрицы (6)

$$\lambda^2 - \frac{m^2}{s_F^2}(\rho'')^2 (Q_{\tau\tau} - Q_{\nu\nu}) \cdot \lambda + \frac{m^4}{s_F^4}(\rho'')^4 (Q_{\tau\tau}Q_{\nu\nu} - Q^2_{\tau\nu}) = 0. \tag{7}$$

Тогда главные значения λ_i (квадраты экстремальных ошибок) определятся выражением

$$\lambda_{1,2} = \frac{m^2}{2s_F^2}(\rho'')^2 \{Q_{\tau\tau} + Q_{\nu\nu} \pm \sqrt{(Q_{\tau\tau} - Q_{\nu\nu})^2 + 4Q^2_{\tau\nu}}\}, \tag{8}$$

а соответствующие им направления составят с осью τ в плоскости $\tau O \nu$ углы

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2Q_{\tau\nu}}{Q_{\tau\tau} - Q_{\nu\nu}},$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{1}{2}\pi. \tag{9}$$

Интересна матрица тензора погрешности положения точки в системе координат σ, V, W, в которой ось σ совпадает с интересующей нас линией F, а V и W есть главные оси плоского тензора $M^2_{r_{\tau\nu}}$ или оси экстремальных ошибок по направлениям в плоскости $\tau O \nu$, совпадающей с VOW.

Преобразование компонент тензора к иной системе равносильно скалярному умножению его на тензор поворота T слева и на сопряженный тензор T_c справа. Поэтому, учитывая инвариантный характер тензора, напишем:

$$\mathrm{M}^2_r = m^2 \mathrm{T} \cdot \Pi^{-1} \cdot \mathrm{T}_c. \tag{10}$$

Матрица тензора T преобразования из системы σ, τ, γ в систему σ, V, W имеет известный вид:

$$\|T\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ 0 & -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

В результате действий (10) получим тензор M_r^2 в матричной форме

$$\|M_r^2\| = m^2 \begin{Vmatrix} Q_{\sigma\sigma} & Q_{\sigma V} & Q_{\sigma W} \\ Q_{\sigma V} & Q_{VV} & 0 \\ Q_{\sigma W} & 0 & Q_{WW} \end{Vmatrix}. \tag{12}$$

Таким образом, если в матрице весовых коэффициентов имеется хотя бы один (матрица симметрична) корреляционный компонент, равный нулю, то ему соответствующие компоненты главной диагонали являются квадратами экстремальных ошибок по направлениям в плоскости, проходящей через эти направления. Если же в матрице (12) корреляционные компоненты i-строки и i-столбца равны нулю, то диагональный компонент, лежащий на пересечении этой строки и столбца, является квадратом экстремальной ошибки по направлению в полном тензоре M_r^2.

Как следствие выражений (10), (12) можно указать другой путь определения экстремальных угловых ошибок в направлении линии. Вычисляя с помощью компонентов тензора M_r^2 (1) угол φ_1 (9), определяем тензор поворота (11) и тензор M_r^2 в системе σ, V, W (12). Тогда тензор погрешности направления линии представится следующей матричной формой:

$$\|M_{F'}^2\| = \frac{m^2}{s_F^2} (\rho'')^2 \begin{Vmatrix} Q_{VV} & 0 \\ 0 & Q_{WW} \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

откуда находим

$$m'_{F_{\max}} = \frac{m}{s_F} \rho'' \sqrt{Q_{VV}} \quad m'_{F_{\min}} = \frac{m}{s_F} \rho'' \sqrt{Q_{WW}}. \tag{14}$$

Мы рассмотрели ошибку направления линии между двумя точками пространства, погрешность одной из которых задана соответствующим тензором квадратов ошибок ее координат.

Если же известна погрешность положения двух точек, представленная надлежащим тензором $M_{r_{I,II}}^2$ квадратов ошибок их координат в пространстве шести измерений, то поставленную задачу можно решить и таким путем. Необходимо прежде получить одним из известных приемов (см., например, [1, стр. 52]) тензор квадратов ошибок приращений координат точек I, II. Найденный тензор характеризует погрешность положения одной точки по отношению к другой. Поэтому мы вправе использовать его в качестве заданного тензора погрешности положения избранной точки. Таким образом, здесь задача по существу сведена к изложенному выше случаю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордеев Ю. А. Обобщение приемов оценки точности положения пунктов плановых опорных геодезических сетей. Ученые записки ЛВИМУ им. Макарова, Вып. XV, «Морской транспорт», Л., 1959.

2. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. «Наука», М., 1965.

Работа поступила
12 февраля 1966 г.