МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1965 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 2

Н. Н. ОРЕЛ

К ВОПРОСУ ГРУППОВОГО РЕШЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ЭЛЕКТРОННОВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

Как известно, уравнивание обширных сетей триангуляции приводит к решению больших систем линейных алгебраических уравнений. В связи с ограниченностью оперативной памяти ЭВМ большое значение приобретают групповые методы уравнивания триангуляции, позволяющие решать системы уравнений по частям.

В настоящей статье даются некоторые методы группового уравнивания применительно к работе на ЭВМ. Предварительно излагается видоизмененный способ Гаусса решения нормальных уравнений [1], [2], который затем кладется в основу многогруппового уравнивания триангуляции.

Видоизмененный способ Гаусса решения нормальных уравнений. Этот способ отличается от общеизвестного способа Гаусса тем, что после исключения каждого неизвестного, к полученным уравнениям последовательно дописываются первое уравнение, деленное на $[aa]$, затем второе, деленное на $[bb.1]$, третье, деленное на $[cc.2]$ и т. д.

В конечном итоге получается система нормальных уравнений с единичной матрицей, которая и дает вектор неизвестных.

Ниже приводится соответствующая схема решения уравнений по этому способу (таблица 1).

Символика Гаусса позволяет уяснить порядок вычислений по схеме. Как видно из формул (1), элементы со штрихами вверху квадратных скобок определяются по тем же правилам, что и остальные элементы.

$$\left.\begin{aligned}
[ac]' &= \frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}\,\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},\\
[al]' &= \frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}\,\frac{[bl.1]}{[bb.1]},\\
[al]'' &= [al]' - [ac]'\,\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},\\
[bl\cdot 1]' &= \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},
\end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Гауссовы обозначения в схеме показывают, что необходимые для оценки точности величины можно вычислять по обычным формулам.

Таблица 1

Схема решения нормальных уравнений

		1	2	3	4	5	6	7	8
			A		L			E	
a_0	1	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	1	0	0
	2	$[ab]$	$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$	0	1	0
	3	$[ac]$	$[bc]$	$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$	0	0	1
			$A^{(1)}$		$L^{(1)}$			$T^{(1)}$	
a_1	1	1	$\frac{[ab]}{[aa]}$	$\frac{[ac]}{[aa]}$	$\frac{[al]}{[aa]}$	$\frac{[as]}{[aa]}$	$\tau_{11}^{(1)}$	0	0
	2	0	$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bl.1]$	$[bs.1]$	$\tau_{21}^{(1)}$	1	0
	3	0	$[bc.1]$	$[cc.1]$	$[cl.1]$	$[cs.1]$	$\tau_{31}^{(1)}$	0	1
			$A^{(2)}$		$L^{(2)}$			$T^{(2)}$	
a_2	1	1	0	$[ac]'$	$[al]'$	$[as]'$	$\tau_{11}^{(2)}$	$\tau_{12}^{(2)}$	0
	2	0	1	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$\frac{[bs.1]}{[bb.1]}$	$\tau_{21}^{(2)}$	$\tau_{22}^{(2)}$	0
	3	0	0	$[cc.2]$	$[cl.2]$	$[cs.2]$	$\tau_{31}^{(2)}$	$\tau_{32}^{(2)}$	1
			$A^{(3)}$		$L^{(3)}$			$T^{(3)}=T$	
a_3	1	1	0	0	$[al]''$	$[as]''$	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}
	2	0	1	0	$[bl.1]'$	$[bs.1]'$	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}
	3	0	0	1	$\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	$\frac{[cs.2]}{[cc.2]}$	τ_{31}	τ_{32}	τ_{33}
		$\delta x_1=-L_1^{(3)}$;	$\delta x_2=-L_2^{(3)}$;	$\delta x_3=-L_3^{(3)}$					

Особенность способа заключается в том, что он с одной стороны сводит решение нормальных уравнений к однотипным операциям, с другой, позволяет как при решении нормальных уравнений, так и при вычислении обратной матрицы $T=\|\tau_{ik}\|$ помещать результаты всех промежуточных вычислений в ячейки памяти машины, вначале занятые исходными данными.

Двухгрупповое уравнивание триангуляции. Представим нормальные уравнения в виде:

$$\left\| \begin{matrix} \underset{(r,\ r)}{A_{11}} & \underset{(r,\ s)}{A_{12}} \\ \underset{(s,\ r)}{A_{21}} & \underset{(s,\ s)}{A_{22}} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \underset{(r,\ 1)}{\delta \mathbf{x}_{\mathrm{I}}} \\ \underset{(s,\ 1)}{\delta \mathbf{x}_{\mathrm{II}}} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \underset{(r,\ 1)}{\mathbf{L}_{\mathrm{I}}} \\ \underset{(s,\ 1)}{\mathbf{L}_{\mathrm{II}}} \end{matrix} \right\| = 0, \qquad (2)$$

где в скобках указаны порядки субматриц и субвекторов, причем $r+s=n$ (n — число уравнений). После умножения клеточной матрицы A на вектор δx по субматрицам и субвекторам получим:

$$\left.\begin{aligned} A_{11}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{I}}+A_{12}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}+\mathbf{L}_{\mathrm{I}}=0, \\ A_{21}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{I}}+A_{22}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}+\mathbf{L}_{\mathrm{II}}=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Решаем систему (3). Умножаем слева первое уравнение на A_{11}^{-1} и выражаем явно вектор δx_{I}, получаем:

$$\delta\mathbf{x}_{\mathrm{I}}=-A_{11}^{-1}A_{12}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}-A_{11}^{-1}\mathbf{L}_{\mathrm{I}}. \tag{4}$$

После подстановки этого значения $\delta\mathbf{x}_{\mathrm{I}}$ во второе из уравнений (3) находим:

$$A_{22}^{(1)}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}+\mathbf{L}_{\mathrm{II}}^{(1)}=0, \tag{5}$$

где

$$A_{22}^{(1)}=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}, \quad \mathbf{L}_{\mathrm{II}}^{(1)}=\mathbf{L}_{\mathrm{II}}-A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{L}_{\mathrm{I}}. \tag{6}$$

Из (5) следует:

$$\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}=-A_{22}^{(1)-1}\mathbf{L}_{\mathrm{II}}^{(1)}. \tag{7}$$

Формулы (7) и (4) решают поставленную задачу.

На практике одновременно с субвекторами уравненных элементов удобно находить и величины, необходимые для оценки точности.

Можно принять такой порядок выполнения операций по формулам (7) и (4) с попутным определением указанных выше величин.

$$\left.\begin{aligned}
&1.\ A_{11}^{-1};\\
&2.\ \text{а) } A_{11}^{-1}A_{12},\ \text{б) } A_{21}A_{11}^{-1}A_{12},\ \text{в) } A_{21}A_{11}^{-1},\ \text{г) } A_{21}A_{11}^{-1}F_{\mathrm{I}};\\
&3.\ \text{а) } A_{22}^{(1)}=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12},\ \text{б) } F_{\mathrm{II}}^{(1)}=F_{\mathrm{II}}-A_{21}A_{11}^{-1}F_{\mathrm{I}};\\
&4.\ A_{22}^{(1)-1};\\
&5.\ \text{а) } U_{\mathrm{II}}=-A_{22}^{(1)-1}F_{\mathrm{II}}^{(1)},\ \text{б) } (\mathbf{f}_{\mathrm{II}},\ \mathbf{q}_{\mathrm{II}}),\ \text{в) } \frac{1}{P_{x_{\mathrm{II}}}}=(A_{22}^{(1)-1})_{ii};\\
&6.\ \text{а) } A_{11}^{-1}A_{12}U_{\mathrm{II}},\ \text{б) } A_{11}^{-1}F_{\mathrm{I}},\ \text{в) } U_{\mathrm{I}}=-A_{11}^{-1}A_{12}U_{\mathrm{II}}-A_{11}^{-1}F_{\mathrm{I}};\\
&7.\ \text{а) } (\mathbf{f}_{\mathrm{I}},\ \mathbf{q}_{\mathrm{I}}),\ \text{б) } \frac{1}{P_F}=(\mathbf{f}_{\mathrm{I}},\ \mathbf{q}_{\mathrm{I}})+(\mathbf{f}_{\mathrm{II}},\ \mathbf{q}_{\mathrm{II}}).
\end{aligned}\right| \tag{8}$$

В формулах (8) выражения $F_{\mathrm{I}}=\|\mathbf{L}_{\mathrm{I}}-\mathbf{f}_{\mathrm{I}}\|$, $F_{\mathrm{II}}=\|\mathbf{L}_{\mathrm{II}}-\mathbf{f}_{\mathrm{II}}\|$ — матрицы, у которых векторами—столбцами являются субвекторы свободных членов и субвекторы коэффициентов приведенной к линейному виду весовой функции; матрицы же U_{I} и U_{II} имеют выражение:

$$U_{\mathrm{I}}=\|\delta\mathbf{x}_{\mathrm{I}}\,\mathbf{q}_{\mathrm{I}}\|, \quad U_{\mathrm{II}}=\|\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}\,\mathbf{q}_{\mathrm{II}}\|. \tag{9}$$

Таким образом, вычислив матрицы U_{I} и U_{II}, мы найдем одновременно субвекторы уравненных элементов $\delta\mathbf{x}_{\mathrm{I}}$ и $\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}$ и субвекторы переходных коэффициентов $\mathbf{q}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{q}_{\mathrm{II}}$.

В формуле 5б из (8) через $(A_{22}^{(1)-1})_{ii}$ обозначены диагональные элементы матрицы $A_{22}^{(1)-1}$. Очевидно, формула 5в позволяет находить веса s последних уравненных элементов — компонент субвектора $\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}$.

Наконец, в формулах (8) везде, кроме 5в, круглые скобки означают скалярные произведения соответствующих векторов.

Формулы (8), как и другие формулы настоящей статьи, предназначены для косвенных измерений. Легко написать аналогичные формулы и для условных измерений.

Нетрудно видеть, что для получения формул (8) была фактически решена по способу Гаусса система двух нормальных уравнений, у которых коэффициенты заменены субматрицами A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, а компоненты векторов $\delta\mathbf{x}$ и $\mathbf{L}$ субвекторами $\delta\mathbf{x}_{\mathrm{I}}$, $\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}$ и $\mathbf{L}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{L}_{\mathrm{II}}$.

На этом основании равенства (3) можно назвать системой двух обобщенных уравнений.

Многогрупповое уравнивание триангуляции. Если разбить матрицу A горизонтальными и вертикальными прямыми на любое число субматриц, а векторы $\delta\mathbf{x}$ и $\mathbf{L}$ — на соответствующее число субвекторов, и умножить полученную многоклеточную матрицу A на вектор $\delta\mathbf{x}$ по соответствующим субматрицам и субвекторам, то получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{I}}+A_{12}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}+\ldots+A_{1l}\delta\mathbf{x}_{l}+\mathbf{L}_{\mathrm{I}}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{l1}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{I}}+A_{l2}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}+\ldots+A_{ll}\delta\mathbf{x}_{l}+\mathbf{L}_{l}=0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Систему (10), очевидно, также можно решить по способу Гаусса, но значительно эффективнее она решается на ЭВМ по видоизмененному способу Гаусса, изложенному в пункте 1 настоящей статьи. Ниже приводится схема этого способа (таблица 2).

В таблице 2 E — единичная матрица, $F_{\mathrm{I}}=\|\mathbf{L}_{\mathrm{I}}\,\mathbf{f}_{\mathrm{I}}\|$, $F_{\mathrm{II}}=\|\mathbf{L}_{\mathrm{II}}\,\mathbf{f}_{\mathrm{II}}\|$, $F_{\mathrm{III}}=\|\mathbf{L}_{\mathrm{III}}\,\mathbf{f}_{\mathrm{III}}\|$, записи же A_{11}/A_{11}^{-1}, $A_{22}^{(1)}/A_{22}^{(1)-1}$, $A_{33}^{(2)}/A_{33}^{(2)-1}$ означают, что при машинном счете обратные матрицы A_{11}^{-1}, $A_{22}^{(1)-1}$, $A_{33}^{(2)-1}$ помещаются в ячейки, ранее занятые матрицами A_{11}, $A_{22}^{(1)}$, $A_{33}^{(2)}$.

Очевидно, на последнем этапе α_3 схемы мы получаем субвекторы неизвестных и переходных коэффициентов в виде векторов—столбцов следующих матриц:

$$U_{\mathrm{I}}=\|-\delta\mathbf{x}_{\mathrm{I}}\,\mathbf{q}_{\mathrm{I}}\|=F_{\mathrm{I}}^{(3)},\ U_{\mathrm{II}}=\|-\delta\mathbf{x}_{\mathrm{II}}\,\mathbf{q}_{\mathrm{II}}\|=F_{\mathrm{II}}^{(3)},\ U_{\mathrm{III}}=\|-\delta\mathbf{x}_{\mathrm{III}}\,\mathbf{q}_{\mathrm{III}}\|=F_{\mathrm{III}}^{(3)}. \tag{11}$$

Обратные веса уравненных элементов последней группы уравнений можно вычислять по формуле:

$$\frac{1}{P_{x_{\mathrm{III}}}}=(A_{33}^{(2)-1})_{ii}, \tag{12}$$

которая имеет тот же смысл, что и формула 5в из (8).

Из сопоставления таблиц 1 и 2 видно, что на вычислительных этапах α_0, α_1, α_2, α_3 таблицы 2 вместо элементов взяты субматрицы, причем на элиминационных строках деление элементов заменено умножением субматриц слева на соответствующие обратные субматрицы. Этапы же n_1, n_2, n_3 в таблице 1 отсутствуют, так как здесь соответствующие вычисления можно выполнять без записи.

Нетрудно видеть, что уравнивание триангуляции по приведенным выше формулам сводится к осуществлению таких основных операций на ЭВМ: обращение матриц, перемножение матриц и вычисление скалярных произведений векторов. Для перечисленных операций в вычислительных центрах, как правило, имеются стандартные программы.

Таблица 2

Схема решения обобщенных нормальных уравнений

		1	2	3	4
	1	A_{11}/A_{11}^{-1}	A_{12}	A_{13}	F_{I}
α_0	2	A_{21}	A_{22}	A_{23}	F_{II}
	3	A_{31}	A_{32}	A_{33}	F_{III}
	1	E	$A_{11}^{-1}A_{12} = A_{12}^{(1)}$	$A_{11}^{-1}A_{13} = A_{13}^{(1)}$	$A_{11}^{-1}F_{\mathrm{I}} = F_{\mathrm{I}}^{(1)}$
n_1	2	A_{21}	$A_{21}A_{12}^{(1)}$	$A_{21}A_{13}^{(1)}$	$A_{21}F_{\mathrm{I}}^{(1)}$
	3	A_{31}	$A_{31}A_{12}^{(1)}$	$A_{31}A_{13}^{(1)}$	$A_{31}F_{\mathrm{I}}^{(1)}$
	1	E	$A_{12}^{(1)}$	$A_{13}^{(1)}$	$F_{\mathrm{I}}^{(1)}$
α_1	2	0	$A_{22} - A_{21}A_{12}^{(1)} = A_{22}^{(1)}/A_{22}^{(1)-1}$	$A_{23} - A_{21}A_{13}^{(1)} = A_{23}^{(1)}$	$F_{\mathrm{II}} - A_{21}F_{\mathrm{I}}^{(1)} = F_{\mathrm{II}}^{(1)}$
	3	0	$A_{32} - A_{31}A_{12}^{(1)} = A_{32}^{(1)}$	$A_{33} - A_{31}A_{13}^{(1)} = A_{33}^{(1)}$	$F_{\mathrm{III}} - A_{31}F_{\mathrm{I}}^{(1)} = F_{\mathrm{III}}^{(1)}$
	1		$A_{12}^{(1)}$	$A_{12}^{(1)}A_{23}^{(2)}$	$A_{12}^{(1)}F_{\mathrm{II}}^{(2)}$
n_2	2		E	$A_{22}^{(1)-1}A_{23}^{(1)} = A_{23}^{(2)}$	$A_{22}^{(1)-1}F_{\mathrm{II}}^{(1)} = F_{\mathrm{II}}^{(2)}$
	3		$A_{32}^{(1)}$	$A_{32}^{(1)}A_{23}^{(2)}$	$A_{32}^{(1)}F_{\mathrm{II}}^{(2)}$
	1	E	0	$A_{13}^{(1)} - A_{12}^{(1)}A_{23}^{(2)} = A_{13}^{(2)}$	$F_{\mathrm{I}}^{(1)} - A_{12}^{(1)}F_{\mathrm{II}}^{(2)} = F_{\mathrm{I}}^{(2)}$
α_2	2	0	E	$A_{23}^{(2)}$	$F_{\mathrm{II}}^{(2)}$
	3	0	0	$A_{33}^{(1)} - A_{32}^{(1)}A_{23}^{(1)} = A_{33}^{(2)}/A_{33}^{(2)-1}$	$F_{\mathrm{III}}^{(1)} - A_{32}^{(1)}F_{\mathrm{II}}^{(2)} = E_{\mathrm{III}}^{(2)}$
	1			$A_{13}^{(2)}$	$A_{13}^{(2)}F_{\mathrm{III}}^{(3)}$
n_3	2			$A_{23}^{(2)}$	$A_{23}^{(2)}F_{\mathrm{III}}^{(3)}$
	3			E	$A_{33}^{(2)-1}F_{\mathrm{III}}^{(2)} = F_{\mathrm{III}}^{(3)}$
	1	E	0	0	$F_{\mathrm{I}}^{(2)} - A_{13}^{(2)}F_{\mathrm{III}}^{(3)} = F_{\mathrm{I}}^{(3)}$
α_3	2	0	E	0	$F_{\mathrm{II}}^{(2)} - A_{23}^{(2)}F_{\mathrm{III}}^{(3)} = F_{\mathrm{II}}^{(3)}$
	3	0	0	E	$F_{\mathrm{III}}^{(3)}$
		$U_{\mathrm{I}} = F_{\mathrm{I}}^{(3)}$	$U_{\mathrm{II}} = F_{\mathrm{II}}^{(3)}$	$U_{\mathrm{III}} = F_{\mathrm{III}}^{(3)}$	

Предложенный способ многогруппового уравнивания позволяет эффективно решать на ЭВМ большие системы линейных алгебраических уравнений с одновременным вычислением величин, необходимых для оценки точности уравненных элементов триангуляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Орел. О решении нормальных уравнений. Маркшейдерское дело, вып. II. Металлургиздат, М., 1951.
2. E. Durand. Solutions numériques des équations algébriques, T. II. Paris, 1961.

Работа поступила
24 сентября 1964 г.