МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1965 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 2

Л. И. КОРДЮК

НОВАЯ ПРОЕКЦИЯ, БЛИЗКАЯ К ПРОЕКЦИИ ГАУССА

Основные формулы и метод

Некоторые проекции, в которых средний меридиан — прямая, а изображение экватора — прямая, перпендикулярная к осевому меридиану, могут быть представлены в следующем виде:

$$x = m_0 X_c;$$
$$y = m_0 f(Y), \tag{1}$$

где X_c, Y — сфероидические прямоугольные координаты;
x, y — плоские прямоугольные координаты;
m_0 — коэффициент, т. е. масштаб изображения по осевому меридиану, который постоянен и меньше единицы.

При применении проекции для геодезических вычислений в шестиградусных зонах Y малая величина; поэтому $f(Y)$ целесообразно разложить в ряд по степеням Y так:

$$f(Y) = Y + CY^3 + DY^5 + LY^7 + \ldots, \tag{2}$$

где C, D и L — неопределенные коэффициенты.

Как известно, сфероидическая ордината вычисляется по формуле [1]:

$$Y = lN\cos B - \frac{l^3}{3!} Nt^2 \cos^3 B - \frac{l^5}{5!} Nt^2 (8V^2 - t^2) \cos^5 B -$$
$$- \frac{l^7}{7!} Nt^2 (136 - 88t^2 + t^4) \cos^7 B \tag{3}$$

и абсцисса по формуле [1]:

$$X_c = X + \frac{l^2}{2!} N \sin B \cos B + \frac{l^4}{4!} N \sin B \cos^3 B (5V^2 - t^2) +$$
$$+ \frac{l^6}{6!} N \sin B \cos^5 B (61 - 58t^2 + t^4), \tag{4}$$

где l — долгота от осевого меридиана зоны;
B — геодезическая широта

$$t = \operatorname{tg} B; \quad V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B;$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}; \quad X = \int_0^B M dB,$$

M — радиус кривизны меридиана;
N — радиус кривизны первого вертикала.

Тогда, подставляя (3) в (2)) и применяя преобразованное выражение (2) к (1), получим:

$$x = m_0 X_c;$$

$$y = m_0 \Big[lN \cos B + \frac{l^3}{3!} N (6CN^2 - t^2) \cos^3 B +$$

$$+ \frac{l^5}{5!} N (120DN^4 - 60CN^2 t^2 - 8V^2 t^2 + t^4) \cos^5 B +$$

$$+ \frac{l^7}{7!} N (5040LN^6 - 4200DN^4 t^2 - 1008CN^2 t^2 + 546CN^2 t^4 - 136 +$$

$$+ 88t^2 - t^6) \cos^7 B \Big]. \qquad (5)$$

Эти выражения определяют некоторые проекции в виде функции геодезических координат. Для того, чтобы получить проекцию, удовлетворяющую определенным условиям, необходимо:

1) вначале найти коэффициенты первой квадратичной формы, с помощью которых вычисляются масштабы проекции;

2) взяв какие-либо производственные условия, определяют из них коэффициенты C, D, L и m_0, тем самым получая проекцию, удовлетворяющую поставленным условиям.

Наиболее легко получить проекции: близкую к конформной Гаусса, эквивалентную, равномасштабную по параллелям, а та же ортогональную.

Коэффициенты первой квадратичной формы для проекций

Дифференцируя (5), то есть x, y по B и l, найдем *:

$$\frac{\partial x}{\partial B} = m_0 M \Big[1 + \frac{l^2}{2!} \cos^2 B (V^2 - t^2) +$$

$$+ \frac{l^4}{4!} V^2 \cos^4 B \left(5V^2 - 18t^2 + t^4 20\eta^2 t^2 - \eta^2 \frac{t^4}{V^2} \right) +$$

$$+ \frac{l^6}{6!} \cos^6 B (61 - 479 t^2 + 179 t^4 - t^6) \Big];$$

$$\frac{\partial y}{\partial B} = - m_0 M \left[l \sin B + \frac{l^3}{3!} \sin B \cos^2 B \left(2V^2 - t^2 + 18CN^2 - 6 \frac{N^2 V^2}{t} \frac{dC}{dB} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{l^5}{5!} \sin B \cos^4 B (600DN^4 + 120CN^2 - 180CN^2 t^2 + 16 - 28t^2 + t^4) \right];$$

$$\frac{\partial x}{\partial l} = m_0 N \cos B \Big[l \sin B + \frac{l^3}{3!} \sin B \cos^2 B (5V^2 - t^2) +$$

$$+ \frac{l^5}{6!} \sin B \cos^4 B (61 - 58t^2 + t^4) \Big]; \qquad (6)$$

---

* Коэффициент C, как легко заметить, является функцией широты, поэтому дифференцируя y по B, также дифференцируем и C по B.

$$\frac{\partial y}{\partial l} = m_0 N \cos B \Bigl[1 + \frac{l^2}{2!} \cos^2 B\,(6CN^2 - t^2) +$$

$$+ \frac{l^4}{4!} \cos^4 B\,(120DN^4 - 60CNt^2 - 8V^2t^2 + t^4) +$$

$$+ \frac{l^6}{6!} \cos^6 B\,(5040LN^6 - 4200DN^4t^2 - 1008CN^2t^2 +$$

$$+ 546CN^2t^4 - 136t^2 + 88t^4 - t^6) \Bigr],$$

где $\eta = e' \cos B$.

С помощью (6) коэффициенты первой квадратичной формы для проекций напишем так:

$$\bar{e} = m_0^2 M^2 \Bigl[1 + l^2V^2 \cos^2 B + \frac{l^4}{3} V^2 \cos^4 B \Bigl(2V^2 - 4t^2 - 5\eta^2 t^2 +$$

$$+ 18CMNt^2 - 6N^3 t \frac{dC}{dB} \Bigr) + \frac{l^6}{45} \cos^6 B\,(450DN^4t^2 + 180CN^2t^2 - 180CN^2t^4 +$$

$$+ 405C^2N^4t^2 + 17 - 86t^2 + 32t^4) \Bigr];$$

$$G = m_0^2 N^2 \cos^2 B \Bigl[1 + 6l^2CN^2 \cos^2 B + \frac{l^4}{3} \cos^4 B\,(30DN^4 + 27C^2N^4 - 24CN^2t^2 +$$

$$+ 3V^2t^2) + \frac{l^6}{45} \cos^6 B\,(630\,LN^6 + 1350DCN^6 - 750DN^4t^2 - 216CN^2t^2 +$$

$$+ 192CN^2t^4 - 675C^2N^4t^2 + 60t^2 - 30t^4) \Bigr];$$

$$f = m_0^2 l^3 R^2 t \cos^4 B \Bigl[\Bigl(V^2 - 6CN^2 + \frac{N^2V^2}{t} \frac{dC}{dB} \Bigr) + \tag{7}$$

$$+ l^2 \cos^2 B\,(1 - t^2 - 10DN^4 - 2CN^2 + 6CN^2t^2 - 9C^2N^4) \Bigr];$$

$$h = m_0^2 R^2 \cos B \Bigl[1 + \frac{l^2}{2} \cos^2 B\,(V^2 + 6CN^2) +$$

$$+ \frac{l^4}{24} \cos^4 B \Bigl(5V^4 - 4V^2t^2 + 120DN^4 - 24CN^2t^2 + 36CV^2N^2 - 20V^2\eta^2t^2 -$$

$$- 24V^2N^2t \frac{dC}{dB} \Bigr) + \frac{l^6}{720} + \cos^6 B\,(5040LN^6 + 1800DN^4 - 2400DN^4t^2 +$$

$$+ 450CN^2 - 1008CN^2t^2 + 96CN^2t^4 + 61 - 148t^2 + 16t^4) \Bigr],$$

где $R^2 = MN$.

Коэффициенты первой квадратичной формы для сфероида, как известно, имеют вид:

$$\begin{aligned} E &= M^2; \\ V &= N^2 \cos^2 B; \\ F &= 0; \\ H &= R^2 \cos^2 B. \end{aligned} \tag{8}$$

Основные формулы проекции, близкой к проекции Гаусса

С помощью (7) и (8) квадраты масштабов по меридианам и параллелям напишем так:

$$m^2 = \frac{\overline{e}}{E};\qquad n^2 = \frac{G}{V}. \tag{9}$$

Теперь найдем проекцию, для которой масштаб по меридианам равен масштабу по параллелям, то есть:

$$m = n. \tag{10}$$

Условие (10) будет выполнено, если величины второго, четвертого и шестого порядка для (9) будут соответственно равны между собой. Отсюда следует:

$$C = \frac{V^2}{3!N^2};\quad \frac{dC}{dB} = \frac{-2\eta^2 t}{3N^2};\qquad D = \frac{V^2(5V^2-4\eta^2t^2)}{5!\,N^4};\quad L = \frac{61}{7!\,N^6}. \tag{11}$$

Подставляя значение коэффициентов C, D и L в (5), получим:

$$x = m_0 X_c;$$

$$y = m_0\Big[lN\cos B + \frac{l^3}{3!}N\cos^3 B(V^2-t^2) + \frac{l^5}{5!}N\cos^5 B(5-18t^2+t^4+10\eta^2-22\eta^2t^2) + \frac{l^7}{7!}N\cos^7 B(61-479t^2+179t^4-t^6)\Big]. \tag{12}$$

Эти выражения определяют новую проекцию, удовлетворяющую условию $m=n$. Член с l^7, например, при $l=3°$ и $B=45°$ едва достигает 0,03 *мм*, следовательно, им можно при вычислениях пренебречь. Нужно отметить, что член с l^7 равен соответствующему члену проекции Гаусса [2].

Подставляя значения коэффициентов C, D и L, а также значение $\frac{dC}{dB}$ в (7), получим коэффициенты первой квадратичной формы проекции в следующем виде:

$$\overline{e} = M^2P;\qquad G = N^2P\cos^2 B;\qquad f = -\frac{2l^3}{3}m_0^2N^2\eta^2t\cos^4 B;\qquad h = R^2P.\cos B, \tag{13}$$

где

$$P = m_0^2\Big[1 + l^2V^2\cos^2 B + \frac{l^4}{3}V^4\cos^4 B(2-t^2) + \frac{l^6}{45}\cos^6 B(17-26t^2+2t^4)\Big].$$

Масштабы проекции и угол ε

На основании (13) и (8) запишем масштабы проекции в следующем виде:

$$m = n = m_0 \left[1 + \frac{l^2}{2!} V^2 \cos^2 B + \frac{l^4}{4!} V^4 \cos^4 B (5 - 4t^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{l^6}{6!} \cos^6 B (61 - 148t^2 + 16t^4) \right]. \qquad (14)$$

В дальнейших исследованиях членом с l^6 пренебрегаем ввиду его малости.

Масштаб площади найдем с помощью (13) и (8) в следующем виде:

$$p = P. \qquad (15)$$

Уклонение картографической сетки от ортогональности вычисляем по формуле:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{f}{h}.$$

Подставляя значения f и h из (13) в это выражение и разлагая $\operatorname{tg}\varepsilon$ в ряд, получим [3]:

$$\varepsilon'' = \frac{2}{3\rho^2} l^3 \eta^2 V^2 t \cos^3 B. \qquad (16)$$

Легко заметить, что $\varepsilon'' = \gamma - \gamma_c$, т. е. ε'' равно разности сближения меридианов проекции Гаусса и сфероидического сближения меридианов.

Из (16) видим, что ε'' — малая величина пятого порядка, которая максимального значения достигает при $B = 26°34'$.

Для южных широт СССР, например станция Кушка, при $B = 35°$ и $l = 3°$, $\varepsilon'' = 0,''034$. Для более северных широт ε'' еще меньше. Таким образом, картографическую сетку можно считать ортогональной. Так как ε'' — малая величина пятого порядка, то масштаб по произвольному направлению, с точностью для величин четвертого порядка включительно равен масштабу по меридиану.

Теперь определим m_0. Для этого поставим условие, чтобы искажения по осевому и крайним меридианам зоны для заданной широты B_x были равны по величине, но обратны по знаку, т. е.

$$m_0 = 1 - \varepsilon_0;$$
$$m_k = 1 + \varepsilon_0, \qquad (17)$$

и учитывая (14), получим:

$$m_0 = 1 - \frac{l_x^2}{2!} V_x^2 \cos^2 B_x - \frac{l_x^4}{4!} V_x^4 \cos^4 B_x (1 - 2t_x^2), \qquad (18)$$

где l_x — долгота крайнего меридиана зоны.

Выражение (18) определяет масштаб изображения по среднему меридиану. В зависимости от того, для какой широты поставим условие (17) при $l_x = 3°$, из (18) получим значение m_0. Для территории СССР наиболее рационально взять $B_x = 53^0$, при этом $m_0 = 0{,}99975$, то есть искажения на осевом меридиане будут равны 1/4000. Представляет практический интерес также проекция с масштабом изображения $m_0 = 0{,}9998$.

Вычисление геодезических координат по плоским прямоугольным

Для решения этой задачи преобразуем формулы (12) в обратные. Из (12) имеем:

$$l=\frac{\overline{y}}{N}\sec B-\frac{l^3}{3!}\cos^2 B(V^2-t^2)-\frac{l^5}{5!}\cos^4 B(5-18t^2+t^4+10\eta^2-22\eta^2t^2)-$$
$$-\frac{l^7}{7!}\cos^6 B(61-479t^2+179t^4-t^6), \qquad (19)$$

где

$$\overline{y}=\frac{y}{m_0}.$$

Отсюда l можно определить методом последовательных приближений. Однако более удобно воспользоваться рядом Лагранжа для неявной функции вида

$$y=x+pf(y),$$

для которой ряд Лагранжа имеет вид:

$$y=x+\frac{p}{1!}f(x)+\frac{p^2}{2!}\frac{d}{dx}f^2(x)+\frac{p^3}{3!}\frac{d^2}{dx^2}f^3(x)+\ldots, \qquad (20)$$

где p — параметр.

Тогда, с введением обозначений

$$\frac{\overline{y}}{N}\sec B=x;$$
$$-\frac{\cos^2 B}{3!}(V^2-t^2)=p;$$
$$-\frac{\cos^4 B}{5!}(5-18t^2+t^4+10\eta^2-22\eta^2t^2)=q; \qquad (21)$$
$$-\frac{\cos^6 B}{7!}(61-479t^2+179t^4-t^6)=r,$$

формула (19) примет вид:

$$l=x+p\left(l^3+\frac{q}{p}l^5+\frac{r}{p}l^7+\ldots\right).$$

Применяя к этому выражению ряд (20) и ограничиваясь величинами седьмого порядка, найдем

$$l=x+\frac{p}{1!}\left[x^3+\frac{q}{p}x^5+\frac{r}{p}x^7\ldots\right]+\frac{p^2}{2!}\frac{d}{dx}\left[x^3+\frac{q}{p}x^5+\ldots\right]^2+$$
$$+\frac{p^3}{3!}\frac{d^2}{dx^2}[x^3+\ldots]^3.$$

Произведя дифференцирование и приведение подобных членов, получим:

$$l=x+px^3+(3p^2+q)x^5+(12p^3+8pq+r)x^7+\ldots \qquad (22)$$

Подставляя значения x, p, q и r из (21) в (22), найдем:

$$l = \frac{\bar{y}}{N}\sec B - \frac{\bar{y}^3}{3!N^3}\sec B(V^2 - t^2) + \frac{\bar{y}^5}{5!N^5}\sec B(5 - 2t^2 + 9t^4 + 10\eta^2 + $$

$$+ 2\eta^2 t^2) - \frac{\bar{y}^7}{7!N^7}\sec B(61 - 31t^2 - 45t^4 - 225t^6). \qquad (23)$$

В дальнейших исследованиях членом с $\bar{y}^7$ пренебрегаем ввиду его малости.

Подставив значение l в первую из формул (12), будем иметь:

$$\bar{x} - X = \frac{\bar{y}^2}{2!\,N}t + \frac{\bar{y}^4}{4!\,N^3}t(V^2 + 3t^2) + \frac{\bar{y}^6}{6!\,N^5}t(1 + 30t^2 + 45t^4),$$

где $\bar{x} = \frac{x}{m}$.

Разлагая в ряд $x—X$ по степеням $(B_0—B)$, получим:

$$M(B_0 - B) + \frac{3}{2}\frac{M^2}{N}\eta^2 t(B_0 - B)^2 + \ldots = \frac{\bar{y}^2}{2N}t + \ldots$$

где B_0 — широта основания ординаты.

Откуда во втором приближении найдем:

$$B_0 - B = \frac{\bar{y}^2 t}{2!\,MN} + \frac{\bar{y}^4 t}{4!\,MN^3}(V^2 + 3t^2 - 9\eta^2 t^2) + \frac{\bar{y}^6 t}{6!\,MN^5}(1 + 30t^2 + 45t^4). \qquad (24)$$

В этом выражении величины t, M, N и η^2 пока неизвестны, так как они являются функциями широты B, которую мы ищем. Известной величиной является широта B_0, т. е. широта основания ординаты. Следовательно, формулы (23) и (24) необходимо привести к широте B_0. Для этого перейдем от неизвестных t, M, N и η^2 к известным t_0, M_0, N_0 и η_0^2.

Напишем такие разложения в ряды [3]:

$$t = t_0 - (B_0 - B)(1 + t_0^2) + (B_0 - B)^2 t_0(1 + t_0^2) - \ldots \qquad (25)$$

$$\frac{1}{MN} = \frac{1}{M_0 N_0}\left[1 + \frac{4(B_0 - B)}{V_0^2}\eta_0^2 t_0 + \ldots\right]. \qquad (26)$$

С помощью (25) и (26) формулу (24) приводим к виду:

$$B_0 - B = \frac{\bar{y}^2 t_0}{2!\,M_0 N_0} - \frac{\bar{y}^4 t_0}{4!M_0 N_0^3}(5V_0^2 + 3t_0^2 - 9\eta_0^2 t_0^2) + $$

$$+ \frac{\bar{y}^6 t_0}{6!M_0 N_0^5}(61 + 90t_0^2 + 45t_0^4), \qquad (27)$$

где η^2 заменили через η_0^2, допуская при этом погрешность седьмого порядка.

В правой части этого выражения все величины известны, поэтому $B_0—B$ может быть вычислена, а затем широта B будет:

$$B = B_0 - (B_0 - B).$$

Теперь преобразуем еще формулу (23). Для подстановки соответствующих величин в (23) образуем их.

Принимая во внимание, что в первом приближении

$$B_0-B=\frac{\bar{y}^2t_0}{2M_0N_0},$$

напишем квадраты тангенса:

$$t^2=t_0^2-\frac{\bar{y}^2}{N_0^2}t_0^2(V_0^2+t_0^2+\eta_0^2t_0^2). \tag{28}$$

Далее имеем:

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{N_0}\left[1+\frac{\bar{y}^2}{2N_0^2}\eta_0^2t_0^2-\frac{\bar{y}^4}{3N_0^4}\eta_0^2t_0^2+\ldots\right]. \tag{29}$$

Для замены η^2 напишем:

$$\eta^2=\eta_0^2+\frac{\bar{y}^2}{N_0^2}\eta_0^2t_0^2+\ldots \tag{30}$$

Для секанса найдем:

$$\sec B=\sec B_0\left[1-\frac{\bar{y}^2}{2!N_0^2}t_0^2V_0^2+\frac{\bar{y}^4}{4!N_0^4}t_0^2(8+9t_0^2+16\eta_0^2+6\eta_0^2t_0^2)\right]. \tag{31}$$

Подставляя значения t^2, $\frac{1}{N}$, η^2 и $\sec B$ из (28), (29), (30) и (31) в (23), получим:

$$l=\frac{\bar{y}}{N_0}\sec B_0\left[1-\frac{\bar{y}^2}{3!N^2}(V^2+2t_0^2)+\frac{\bar{y}^4}{5!N_0^4}(5+28t_0^2+24t_0^4+10\eta_0^2-8\eta_0^2t_0^2)\right]. \tag{32}$$

Формулы (27) и (32) являются окончательными при вычислении с помощью арифмометра.

Сближение меридианов на плоскости

Сближение меридианов вычисляем по известной формуле:

$$\operatorname{tg}\gamma=-\frac{\frac{\partial y}{\partial B}}{\frac{\partial x}{\partial B}}. \tag{33}$$

Для этого подставим значения коэффициентов C и D в (6) и с помощью частных производных $\frac{\partial y}{\partial B}$ и $\frac{\partial x}{\partial B}$ после преобразований напишем:

$$\operatorname{tg}\gamma=\sin B\left[l+\frac{l^3}{3}\cos^2 B(1+t^2+3\eta^2+2\eta^4)+\frac{2l^5}{15}+\ldots\right], \tag{34}$$

откуда

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}l\sin B\left[1+\frac{l^3}{3}\cos^2 B(3\eta^2+2\eta^4)\right]. \tag{35}$$

где членом с $l^4\eta^2$ пренебрегаем.

Из (34) также имеем:

$$\gamma=l\sin B\left[1+\frac{l^2}{3}\cos^2 B(1+3\eta^2+2\eta^4)+\frac{l^4}{15}\cos^4 B(2-t^2)\right]. \tag{36}$$

Из (36) видим, что сближение меридианов в этой проекции равно сближению меридианов в проекции Гаусса.

Если известны прямоугольные координаты, то сближение меридианов будет:

$$\gamma = t_0 \left[\frac{\overline{y}}{N_0} - \frac{\overline{y}^3}{3N_0^3} (1 + t_0^2 - \eta_0^2 - 2\eta_0^4) + \frac{\overline{y}^5}{15N_0^5} (2 + 5t_0^2 + 3t_0^4) \right]. \tag{37}$$

Угол между параллелью и осью y определяем при $B = \text{const}$ аналогично предыдущему. Вначале напишем:

$$\operatorname{tg} \gamma_n = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial l}}{\dfrac{\partial y}{\partial l}}.$$

Подставляя значения частных производных из (6) в это выражение и учитывая значения коэффициентов C и D из (11), после преобразований найдем:

$$\gamma_n = l \sin B \left[1 + \frac{l^2}{3} V^2 \cos^2 B + \frac{l^4}{15} \cos^4 B (2 - t^2) \right], \tag{38}$$

то есть γ_n оказалось равным сфероидическому сближению меридианов.

Вычитая из (36) (38), получим:

$$\gamma - \gamma_n = \frac{2}{3} l^3 \eta^2 V^2 t \cos^3 B, \tag{39}$$

то есть разность сближения меридианов и угла γ_n между параллелью и осью y равна уклонению картографической сетки от 90°, то есть

$$\gamma - \gamma_n = \varepsilon.$$

Масштаб изображения в функции прямоугольных координат проекции

Подставляя значение l из (23) в (14), получим:

$$m = m_0 \left[1 + \frac{\overline{y}^2}{2!\, R^2} + \frac{\overline{y}^4}{4!\, R^4} + \ldots \right], \tag{40}$$

так как $\overline{y} = \dfrac{y}{m_0}$, то можно еще написать:

$$m = m_0 \left[1 + \frac{y^2}{2!\, m_0^2 R^2} + \frac{y^4}{4!\, m_0^4 R^4} + \right]. \tag{41}$$

Это выражение необходимо при выводе поправки к конечной длине геодезической линии на плоскости проекции.

С помощью (26) выражение (40) примет вид:

$$m = m_0 \left[1 + \frac{\overline{y}^2}{2!\, R_0^2} + \frac{\overline{y}^4}{4!\, R_0^4} + \ldots \right]. \tag{42}$$

Из (42) видим, что выражение в скобках по форме полностью соответствует масштабу проекции Гаусса, а множитель m_0 уменьшает масштаб изображения.

Соотношения между прямоугольными координатами проекции и сфероидическими координатами, а также координатами Гаусса

Вычитая из (3) второе выражение (12) и подставляя значение l из (23), получим:

$$Y=\bar{y}-\frac{\bar{y}^3}{3!\,N^2}V^2+\frac{\bar{y}^5}{5!\,N^4}(5+10\eta^2+4\eta^2t^2), \quad (43)$$

где $\bar{y}=\frac{y}{m_0}$.

Обратная зависимость будет:

$$\bar{y}=Y+\frac{Y^3}{3!\,N^2}V^2+\frac{Y^5}{5!\,N^4}(5+10\eta^2-4\eta^2t^2). \quad (44)$$

С помощью (29) и разложения в ряд

$$V^2=V_0^2\left[1+\frac{\bar{y}^2}{N_0^2}\eta_0^2t_0^2+\ldots\right],$$

формулы (43) и (44) примут вид:

$$Y=\bar{y}-\frac{\bar{y}^3}{3!\,N_0^2}V_0^2+\frac{\bar{y}^5}{5!\,N_0^4}(5+10\eta_0^2-36\eta_0^2t_0^2); \quad (45)$$

$$\bar{y}=Y+\frac{Y^3}{3!N_0^2}V_0^2+\frac{Y^5}{5!\,N_0^4}(5+10\eta_0^2+36\eta_0^2t_0^2). \quad (46)$$

Формула (43) применяется при выводе поправки за кривизну изображения геодезической линии на плоскости проекции. Соотношения (45) и (46) необходимы при выводе логарифмических формул для вычисления прямоугольных координат по геодезическим и геодезических по прямоугольным.

Вычитая соответственно из (12) формулы проекции Гаусса [1] и подставляя значение l в функции координат Гаусса, найдем:

$$x=m_0\left[x_г-\frac{y_г^4}{6N^3}\eta^2V^2t\right]; \quad (47)$$

$$y=m_0\left[y_г-\frac{y_г^5}{30N^4}\eta^2(1-8t^2)\right],$$

где $x_г$, $y_г$ — координаты Гаусса.

Поправка к конечной длине геодезической линии

Исходным выражением для вывода формулы поправки к конечной длине геодезической линии возьмем масштаб изображения по меридиану, то есть

$$m=\frac{d\bar{s}}{ds}.$$

Тогда с помощью (41), после соответствующих преобразований, получим:

$$\lg S-\lg s=\lg m_0+\frac{\mu}{2m_0^2R_m^2}\left[y_m^2+\frac{\Delta y^2}{12}-\frac{y_m^4}{6R_m^2}\right], \quad (48)$$

где S — длина хорды геодезической линии на плоскости;
s — длина геодезической линии на сфероиде;

$$\lg m_0 = -0{,}00010858;$$

$$\frac{\mu}{2m_0^2} = 0{,}21725584;$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad \Delta y = y_2 - y_1,$$

R_m — средний радиус кривизны для средней широты линии 1—2.

Легко заметить, что формула (48) при $m_0 = 1$ соответствует аналогичной формуле проекции Гаусса, введение условия $m_0 < 1$ вызывает уменьшение искажения длин линий на плоскости проекции.

Поправки за кривизну и неконформность изображения геодезической линии на плоскости

Азимут на плоскости представим через коэффициенты первой квадратичной формы [4], и азимут на сфероиде в следующем виде:

$$\operatorname{tg} \overline{A} = \frac{h \operatorname{tg} A}{e V^2 \cos B + f \operatorname{tg} A} \tag{49}$$

или через масштабы проекции и угол ε[5].

$$\operatorname{tg} \overline{A} = \frac{n \cos \varepsilon \operatorname{tg} A}{m - n \sin \varepsilon \operatorname{tg} A}, \tag{50}$$

так как $m = n$, то после преобразований имеем:

$$\overline{A} - A = \varepsilon \sin^2 A. \tag{51}$$

Из (51) видим, что искажения азимутов в этой проекции малая величина пятого порядка, а максимальное значение искажения азимутов будет при $A = 90°$ и $A = 270°$.

Максимальное искажение углов найдем, пользуясь известной формулой

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Подставляя экстремальные значения масштабов в эту формулу, после преобразований получим:

$$\omega = \varepsilon, \tag{52}$$

следовательно, максимальное искажение углов равно уклонению картографической сетки от ортогональности, то есть малой величине пятого порядка. Сопоставляя (51) при $A = 90°$, из (52) видим, что максимальное искажение азимутов равно максимальному искажению углов.

Азимут на плоскости вычисляем по формуле:

$$\overline{A}_2 = \alpha_1 + \gamma_1 + \sigma_1, \tag{53}$$

где γ_1 — сближение меридианов на плоскости в первой точке;
α_1 — дирекционный угол хорды геодезической линии на плоскости;
σ_1 — поправка за кривизну и неконформность изображения геодезической линии на плоскости.

Поправки за кривизну и неконформность вычисляем по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{\rho''(\bar{x}_2-\bar{x}_1)}{2R_m^2}\left(\bar{y}_m - \frac{\Delta\bar{y}}{6} - \frac{\bar{y}_m^3}{3R_m^2}\right) + \frac{\rho''\eta_m^2 t_m}{R_m^3}(\bar{y}_2-\bar{y}_1)\bar{y}_m^2 - $$

$$- \frac{2\rho''\eta_m^2 t_m}{3R_m^3}\bar{y}_m^3 \sin^2 L_1, \qquad (54)$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho''(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}{2R_m^2}\left(\bar{y}_m + \frac{\Delta\bar{y}}{6} - \frac{\bar{y}_m^3}{3R_m^2}\right) + \frac{\rho''\eta_m^2 t_m}{R_m^3}(\bar{y}_1-\bar{y}_2)\bar{y}_m^2 - $$

$$- \frac{2\rho''\eta_m^2 t_m}{3R_m^3}\bar{y}_m^3 \sin^2 L_1,$$

где $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$ — координаты начала геодезической линии;

$\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$ — координаты конца геодезической линии;

$$\bar{y}_m = \frac{\bar{y}_1+\bar{y}_2}{2}; \quad L_1=\alpha_1+\gamma_1.$$

Дирекционный угол на плоскости вычисляем по формуле

$$\alpha_1 = A_1 - \gamma_1 - \sigma_1, \qquad (55)$$

где A_1 — азимут линии на сфероиде;

γ_1 — сближение меридианов.

В формулах (54) второй и третий члены являются малыми величинами пятого порядка, значения которых даже при $\bar{y}_2$, близком к 270 *км*, едва достигает —0",02. Поэтому мы ими пренебрегаем при вычислении триангуляции II и III классов при любых значениях ординат. В триангуляции I класса этими величинами мы пренебрегаем при $|\bar{y}_2| \leqslant 150$ *км*.

ВЫВОДЫ

Приведенная проекция по своим свойствам весьма близка к проекции Гаусса. При условии, что масштаб изображения осевого меридиана постоянный и меньший единицы получаем перераспределение искажений длин в сторону их уменьшения. Для ординат, близких к 143 *км*. $m=1$, поэтому для $y<143$ *км* искажения длин отрицательны, достигающие на осевом меридиане — 0,00025; на краях же зоны они близки к +0,00025. Изменения в кривизне изображения геодезической линии при введении такого масштаба не происходит. Величина поправки за неконформность — малая величина пятого порядка, которой можно пренебречь. Из формул (47) видим, что абсцисса в новой проекции меньше абсциссы проекции Гаусса на малую величину шестого порядка, причем абсцисса этой проекции равна сфероидической абсциссе, умноженной на m_0. Легко также заметить, что теория проекции значительно проще теории проекции Гаусса.

Согласно полученным результатам, следует рекомендовать эту проекцию с масштабом $m_0=0,99975$ для государственной системы координат в СССР. Такое условие улучшает качество проекции, и позволяет сохранить шестиградусные зоны для крупномасштабных съемок. Это особенно важно при изыскании инженерных трасс значительной длины (автомобильных дорог, электролиний и т.д .), расположенных с востока на запад. При этом в два раза уменьшается количество координатных систем, пересекаемых трассой. Последнее обстоятельство упрощает вопрос вычисления привязки к пунктам государственной сети. Кроме того, значительно сокращаются вычисления по переходу из зоны в зону.

Приведенные исследования показывают, что следует проводить дальнейшие изыскания новых проекций, которые были бы более приемлемы для геодезических целей как по простоте вычислений, так и по характеру искажений. Проекцию с успехом можно применять для вычислений плоских прямоугольных координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Н. Красовский. Избранные сочинения, том IV. Геодезиздат, М., 1955.
2. Н. Г. Кель. Высшая геодезия и геодезические работы, ч. I. Л.—М., 1932.
3. Л. И. Кордюк. Поликоническая проекция, близкая к конформной. Труды ХИСИ, Харьков, 1951.
4. Б. П. Остащенко-Кудрявцев. Математическая картография, Харьков, 1939.
5. М. Д. Соловьев. Картографические проекции. Геодезиздат, М., 1946.

Работа поступила
4 июня 1964 г.