А. Г. ГРИГОРЕНКО

АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ ВЫСОТНОЙ ОСНОВЫ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ОСАДОК ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Как известно, осадки марок, заложенных в теле того или другого инженерного сооружения, подверженного деформациям, измеряются от пунктов высотной основы — реперов, которые считаются стабильными. Однако это далеко не так. Например, глубинные реперы изменяют свою отметку под действием различных факторов — резких колебаний температуры, действия грунтовых вод и т. д. Особенно приходится сомневаться в стабильности отметок реперов, заложенных в фундаменте сооружений. А они очень часто служат основой для измерения осадок.

В настоящей работе рассматривается метод анализа стабильности исходных реперов для наблюдения за осадками инженерных сооружений, основанный на вероятностном подходе к проблеме. Данный метод также может быть успешно распространен на пункты планового обоснования, что очень важно при исследовании оползневых явлений. Исходным материалом для такого анализа будут служить превышения между исходными реперами. Изменение превышений между одними и теми же реперами при полной их стабильности будет представлять собой не что иное, как поле рассеивания с определенным допуском — предельной среднеквадратической ошибкой принятой методики нивелирования. Поле рассеивания, отвечающее некоторой вероятности, представляет собой зону, которая лежит между границами значений признака качественных измерений, вероятность $\frac{q}{100}$ выхода за которые практически пренебрежимо мала. q представляет собой предел отклонения в процентах. Если поле рассеивания превышений не выходит за границы допуска, то исходные реперы можно считать стабильными.

Анализ стабильности реперов сводится к следующему:

1. Оценка закона распределения интересующего нас признака.
2. Определение с помощью этого признака поля рассеивания, отвечающего близкой к единице вероятности P нахождения признака в пределах этого поля.
3. Определение нарушения устойчивости реперов по смещению центра рассеивания поля.

Число n каждого из циклов определения превышения h_i с течением времени должно обеспечить требуемую точность и надежность оценки превышения h с помощью его среднего значения $\bar{h}$ и аналогично стандарта σ с помощью эмпирического среднего квадратического отклонения s.

Основываясь на центральной предельной теореме [1], найдем

$$P\left(-z_\alpha \leqslant \frac{\bar{h}-h}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant +z_\alpha\right) \approx 2\,\Phi_0(z_\alpha) = \alpha, \tag{1}$$

где $-z_\alpha$ и $+z_\alpha$ — доверительный интервал (аргумент функции Лапласа) с приближенной вероятностью $2\Phi_0(z_\alpha)$, который определяется из выражения

$$2\,\Phi_0(z_\alpha) = \alpha$$

по специальным таблицам [2].

Пусть задана требуемая надежность α и желаемая точность получения результатов наблюдений за осадками инженерных сооружений, то есть верхний предел ошибки в определении h по $\bar{h}$, так, чтобы неравенство

$$|\bar{h}-h| \leqslant \Delta_h$$

выполнялось с вероятностью, не меньшей α.

Тогда из уравнения (1) после некоторых преобразований получим

$$z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \Delta_h. \tag{2}$$

Решая это неравенство относительно n, определим необходимое число наблюдений для обеспечения требуемой точности:

$$n \geqslant \frac{z_\alpha^2 \sigma^2}{\Delta_h^2}. \tag{3}$$

Выражая предельную ошибку оценки h в долях σ, получим

$$q_h = \frac{\Delta_h}{\sigma} \tag{4}$$

и неравенство (3) примет вид

$$n \geqslant \frac{z_\alpha^2}{q_h^2}. \tag{5}$$

Величины α, Δ_h и q_h вычисляются для каждого конкретного случая, согласно расчетам принятой методики нивелирования.

Определение поля рассеивания A исходит из нормальности распределения h_i и обычно принимается

$$A = \pm 3\sigma \tag{6}$$

или

$$A = 6\sigma. \tag{7}$$

Оценка поля A, согласно [2], производится по формуле

$$6\beta\bar{s} < A < 6\gamma\bar{s}, \tag{8}$$

где $\bar{s}$ — среднее из эмпирических s;

β и γ — коэффициенты, зависящие от принятого для доверительной оценки σ уровня надежности α, определяемые из выражений

$$\left.\begin{aligned}\beta &= \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{k_2^2}},\\ \gamma &= \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{k_1^2}}.\end{aligned}\right| \qquad (9)$$

Значения коэффициентов k_1^2 и k_2^2 берутся из специальных таблиц [2] по числу $n-1$ и вероятностях

$$\frac{1+\alpha}{2} \text{ и } \frac{1-\alpha}{2}$$

соответственно, так как

$$\alpha = 1 - \frac{q}{100}.$$

Оценка точности определения превышений при практически постоянном центре рассеивания может быть получена из неравенства

$$M_{\text{пред}} \leq 6\gamma\bar{s}, \qquad (10)$$

где $M_{\text{пред}}$ — предельная средняя квадратическая ошибка определения h.

При нарушении устойчивости реперов получим смещение центра рассеивания на величину

$$l = A - M_{\text{пред}}. \qquad (11)$$

Тогда параметры α и β, основываясь на принципе наименьших квадратов, можно оценить величинами α_l и β_l из соотношений

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i}{n},\\ \beta_1 &= \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\delta_i - \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\end{aligned}\right| \qquad (12)$$

где δ_i — отклонение наблюденного h_i в x_i цикле от первоначального;

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n^2+n}{2}\Delta x; \qquad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{n^2+n}{2}\cdot\frac{2n+1}{3}\Delta x; \qquad (14)$$

Δx — промежуток времени между циклами наблюдений;
n — число циклов наблюдений.

Отсюда постоянство центра поля рассеивания, а следовательно, и стабильность реперов, можно охарактеризовать линией регрессии, уравнение которой для данного случая, согласно [2], может быть записано в виде

$$y(x) = \alpha_1 + \beta_1 (x_i - \bar{x}), \tag{15}$$

где

$$\bar{x} = \frac{n^2+n}{2n} \Delta x.$$

Тогда, взяв приращение функции $y(x)$ на отрезке (0; n), получим величину, которая и будет характеристикой устойчивости высотной опорной основы.

Оценку s параметра σ по $(\delta_i - y_i)$ разностям получим из выражения

$$s = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\delta_i - y_i)^2}{n-2}}. \tag{16}$$

В качестве примера проанализируем результаты нивелирования двух исходных реперов нивелиром НВ-1 из 10 циклов через один месяц.

Результаты нивелирования двух исходных реперов

№ циклов, x_i	δ_i, *мм*	$x_i \delta_i$	y_i	$\delta_i - y_i$	$(\delta_i - y_i)^2$
1	1,2	1,2	—0,05	1,25	1,56
2	1,3	2,6	0,05	1,25	1,56
3	—1,1	—3,3	0,15	—1,25	1,56
4	0,0	0,0	0,25	—0,25	0,06
5	—1,4	—7,0	0,35	—1,75	3,06
6	—1,0	—6,0	0,45	—1,45	2,10
7	1,1	7,7	0,55	0,55	0,30
8	1,2	9,6	0,65	0,55	0,30
9	1,4	12,6	0,75	0,65	0,42
10	1,3	13,0	0,85	0,45	0,20
Σ	4,0	30,4	—	—	11,12

Пользуясь данными таблицы, по формулам (12), (13), (14), (15) и (16), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{10^2+10}{10} = 55.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 55 \frac{2 \cdot 10 + 1}{3} = 385.$$

$$x = \frac{55}{10} = 5{,}5.$$

$$\alpha_1 = \frac{4{,}0}{10} = 0{,}4.$$

$$\beta_1 = \frac{10 \cdot 30{,}4 - 4{,}0 \cdot 55}{10 \cdot 385 - 55^2} = 0{,}102,$$

$$y(x) = 0{,}4 + 0{,}102\,(x_i - 5{,}5),$$

$$s = \pm \sqrt{\frac{11{,}12}{10-2}} = \pm\, 1{,}19 \text{ мм.}$$

Приняв доверительную вероятность $\alpha = 0{,}95$ и предельную относительную погрешность приближения σ посредством $q_з = 0{,}2$ и основываясь на том, что распределение h_i следует нормальному закону, по формуле [2]

$$\sigma \approx \gamma s \approx \left(1 + \frac{z_{\alpha}}{\sqrt{2n}}\right) s \tag{17}$$

имеем

$$\sigma = \left(1 + \frac{1{,}96}{\sqrt{2 \cdot 10}}\right) \cdot 1{,}19 = 1{,}71 \text{ мм.}$$

На основании этого поле рассеивания превышений A примет значение

$$A = 6 \cdot 1{,}71 = 10{,}26 \text{ мм.}$$

Приращение функции $y(x)$ на отрезке (0; 10) будет

$$l = \Delta y = y_{10} - y_0 = 0{,}85 - (-0{,}15) = 1{,}00 \text{ мм.}$$

Это говорит о том, что превышение между опорными реперами за время наблюдений изменилось на $+1{,}00$ *мм* и реперы нельзя считать стабильными.

Предельно допустимая средняя квадратическая ошибка в определении превышений между опорными реперами при их полной стабильности для данного случая будет

$$M_{\text{пред}} = A - l = 9{,}26 \text{ мм}$$

или

$$M_{\text{пред}} = \pm\, 4{,}63 \text{ мм.}$$

ВЫВОДЫ

1. Рассмотренный метод дает возможность осуществить надежный контроль стабильности опорных реперов на основе получения центра рассеивания наблюдений.
2. Метод анализа стабильности опорных реперов позволяет получить оценку точности наблюдений.
3. При заданной точности наблюдений можно легко рассчитать количество приемов на станции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Варден. Математическая статистика, М., ИЛ, 1960.
2. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. «Наука», М., 1965.

Работа поступила
28 ноября 1966 г.