

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, А. В. ГОЛИКОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ НОВОГО МЕТОДА
ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЗЕМНЫХ НЕДР

§ 1. В статье [5] дан аналитический метод решения задачи о нахождении плотности δ недр планеты, согласно которому δ аппроксимируется полиномом

$$\delta_n = \delta_n(x, y, z) = \sum_{m=0}^n \sum_{p+q+r=m} A_{pqr} x^p y^q z^r \quad (1)$$

некоторой степени n . Этот многочлен после перехода к сферическим координатам ($0 \leq r \leq R$, R — радиус Земли; $0 \leq \vartheta \leq \pi$, ϑ — полярное расстояние; $0 \leq \lambda < 2\pi$, λ — долгота) имеет следующий вид:

$$\delta_n(\rho, \vartheta, \lambda) = K_n + \sum_{m=1}^n \rho^m \left(\sum_{p+q+r=m} C_{pqr} \sin^{p+q} \vartheta \cos^r \vartheta \sin^q \lambda \cos^p \lambda \right), \quad (2)$$

где $\rho = \frac{r}{R}$, а K_n и C_{pqr} — функции совокупности геодезических параметров планеты и данных сейсмологии и геологии.

Формула (2) дает искомое распределение плотности внутри Земли, так как при любом n все ее коэффициенты могут быть выражены через величины, вычисляемые по результатам выполняемых в настоящее время наблюдений и измерений. Однако перед тем, как приступить к установлению по (2) распределения плотности земных недр, нужно выполнить некоторые исследования обсуждаемого метода, в частности установить сходимость последовательности полиномов δ_n при увеличении степени n и зависимость находимого многочлена от исходной модели Земли, проверить внутреннюю согласованность получаемого по (2) распределения и апробировать данный метод на улучшении какой-либо известной модели Земли. Настоящая статья посвящена описанию указанного круга исследований, а также некоторой детализации выводов [5] и обсуждению двух трехмерных моделей Земли.

§ 2. Полином δ_n был найден в [5] путем разложения внутри шара радиуса R функции $\delta \in L^2_\tau$ в ряд Фурье по полной ортонормированной в τ системе функций, построенной на основе линейно независимой системы одночленов

$$\{x^p y^q z^r\}, \quad (p, q, r = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\varepsilon_n = \int_{\tau} (\delta - \delta_n)^2 d\tau = \min.$$

Наиболее трудоемкой частью получения δ_n является построение ортонормированной системы $\{\omega_{pqr}\}$, поэтому для контроля нахождения коэффициентов полинома (1) было произведено дважды: по ортогональной в τ системе функций $\{\omega_{pqr}\}$ и по «квазиортогональной» системе $\{\Omega_{pqr}\}$.

В первом случае ортогонализация системы $\{x^p y^q z^r\}$ выполнялась применением процесса Грама—Шмидта к системе функций $\{\phi_i\} = 1, x, y, z, x^2$; и функция $\delta \in L^2_{\tau}$ разлагалась в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\{\omega_i\}$, каждая из которых ω_i ортогональна ко всем предыдущим функциям ω_{i-j} ($j=1, 2, \dots, i$).

Во втором случае находились «квазиортогональные» в τ полиномы Ω_{pqr} , которые при любом $m=p+q+r$ ортогональны всем полиномам низших степеней, но не ортогональны уже найденным той же степени. Разложение по такой системе $\{\Omega_i\}$ сложно в вычислительном отношении, но за счет того, что матрица системы линейных уравнений, определяющих коэффициенты Фурье, в этом случае квазидиагональна, получаемые выражения полиномов Ω_i симметричны, и их вид не зависит от выбора порядка нумерации функций исходной системы $\{x^p y^q z^r\}$, как это имеет место в первом случае.

В обоих случаях коэффициенты разложений были различны, но в силу теоремы единственности разложения по исходной системе $\{x^p y^q z^r\}$ окончательные разложения оказались тождественными и, в случае $n=4$, имеющими вид

$$\delta_4(x, y, z) = A + Bx + Cy + Dz + Ex^2 + \dots + Mxy^2z + Nxyz^2, \quad (3)$$

где в коэффициенты $A, B, \dots$ входят линейные комбинации размерных моментов J_{pqr} плотности δ , именно $J_{pqr} = \int \delta x^p y^q z^r d\tau$. Переходя теперь от последних к безразмерным моментам $\bar{J}_{pqr} = \frac{1}{Ma^n} J_{pqr}$, ($J_{000} = M$, M — масса Земли) и вводя сферические координаты, получаем из (3) разложение вида (2), то есть

$$\delta_4(\rho, \vartheta, \lambda) = a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3 + e\rho^4, \quad (4)$$

где a, b, c, d, e содержат различные степени синусов и косинусов ϑ и λ и безразмерные степенные моменты $\bar{J}_{pqr}(\delta)$.

Таким образом, зная степенные моменты функции δ (размерные или безразмерные), по формуле (3) или (4) можно найти приближенное значение этой функции δ_n ($n \leq 4$) в любой точке шара τ .

§ 3. Обсуждаемые разложения аппроксимируют в τ любую функцию $\delta \in L^2$ полиномом некоторой степени n , то есть функцией определено непрерывной. Поэтому, если заранее известно, что функция δ в области τ имеет конечное число разрывов первого рода, то в окрестности поверхностей, на которых она имеет «скачки», точность приближения используемым полиномом δ_n будет, возможно, недостаточной. Для повышения последней (точности аппроксимации) представляются две возможности: 1) либо повысить степень аппроксимирующего многочлена; 2) либо воспользоваться такой дополнительной информацией, которая позволила бы учесть разрывы функции δ без повышения степени полинома δ_n .

Остановимся на второй возможности. Формулы для δ_n (при $n=0, 1, 2, 3, 4$) позволяют учесть разрывы функции δ (и найти их численные

значения) в том случае, когда известно а-приори их наличие на звездных относительно центра масс τ поверхностях; известны уравнения этих поверхностей, значения функции δ на краевой поверхности тела τ и на поверхностях (также звездных), лежащих между поверхностями разрывов. Ограничимся здесь случаем, когда 1) известно, что на данной поверхности $r = \text{const} = r_0$ имеет место скачок h функции δ , величина которого должна быть найдена; 2) дано значение функции $\delta|_{r=r_0} = \delta$ («краевое» условие); при этом может быть $r = R$. С точки зрения физики Земли это соответствует скачку плотности на границе «ядро—мантия» и заданию плотности поверхностного слоя Земли.

Применим полученные выше разложения к функции

$$\delta^*(r, \vartheta, \lambda) = \delta(r, \vartheta, \lambda) + h\theta(r - r_0).$$

Здесь δ — функция, имеющая только один скачок $h = \text{const}$ при $r = r_0$,

θ — стандартная разрывная функция: $\theta(r - r_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < r_0, \\ 1 & \text{при } r > r_0. \end{cases}$

Таким образом, δ^* суть непрерывная функция. При этом степенные моменты функции δ^* и δ связаны элементарным образом

$$\int \delta^* x^p y^q z^r d\tau = \int \delta x^p y^q z^r d\tau + h \int \theta x^p y^q z^r d\tau,$$

где последний интеграл легко вычисляется при любых p, q, r (при $p+q+r$ равном нечетному числу он обращается в нуль). За счет этого разложение (4) преобразуется в следующее

$$\delta_4(p, \vartheta, \lambda) = a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3 + e\rho^4 + h(a_1 + c_1\rho^2 + e_1\rho^4) - \theta h. \quad (5)$$

Скачок h , входящий в (5), может быть найден на основании «краевого» условия. Полагая плотность δ в основном зависящей от r и слабо зависящей от угловых координат ϑ, λ , осредним (по сфере радиуса ρ) разложение (5), тогда получим

$$\delta_4(\rho) = a' + c'\rho^2 + e'\rho^4 + h(a'_1 + c'_1\rho^2 + e'_1\rho^4) - \theta h. \quad (6)$$

Коэффициенты одномерного распределения (6) — суть функции только степенных моментов искомой плотности. Полагая теперь в (6) $\delta_4 = \bar{\delta}$ при некотором $\rho = \bar{\rho}$, найдем

$$h = \frac{\bar{\delta} - a' - c'\bar{\rho}^2 - e'\bar{\rho}^4}{a'_1 + c'_1\bar{\rho}^2 + e'_1\bar{\rho}^4 - 1}. \quad (7)$$

Формулы (5) и (7) аппроксимируют в τ функцию δ полиномом δ_n ($n \leq 4$), предусматривая возможный скачок плотности при $\rho = \rho_0$. Формула (7) показывает, что скачок h обусловлен моментами функции δ (а значит, и stokсовым постоянным) только четной степени.

§ 4. Разложения (3), (4), (5) получены при решении задачи квадратического приближения функций от трех переменных. По известным свойствам обобщенных рядов Фурье они дают в τ наилучшее приближение в среднем: при увеличении n квадратическое отклонение ϵ_n не возрастает. Другими словами, увеличение степени полинома δ_n каждый раз приводит к более достоверному значению искомой функции δ .

Формулы (3) — (5) можно трактовать также как решение трехмерной усеченной проблемы моментов, если удовлетворяются условия разрешимости этой проблемы, при выполнении которых оно единственно [1, 11]. Как показала численная проверка, степенные моменты плотности земных недр этим условиям удовлетворяют.

§ 5. Применение разложения (5) к решению задачи о распределении плотности земных недр (см. далее в § 7 и § 8) требует еще нахождения степенных моментов плотности, что детально рассмотрено в [6]. При вычислении их нужна некоторая исходная модель Земли, то есть должно быть известно приближенное распределение δ , а также стоксовы постоянные Земли (гармоники внешнего гравитационного потенциала), на основании которых по способу наименьших квадратов находятся квадратические приближения нужных степенных моментов. За счет последнего мы получаем на основе (5) решение задачи улучшения исходной модели Земли.

За исходную модель Земли можно также принять такую трехмерную модель $\delta_2(\rho, \theta, \lambda)$, которая может быть строго получена по совокупности выполняемых в настоящее время наблюдений (без привлечения каких-либо предположений о состоянии, составе вещества внутри Земли и др.), и тогда по методике [6] найдем с использованием разложения (5) приближенное решение обратной задачи теории потенциала по определению плотности земных недр на основе внешнего гравитационного потенциала.

§ 6. Трехмерные распределения плотности земных недр ниже будут строиться на основе геодезических параметров планеты (стоксовых постоянных, а в § 8, еще дополнительно, динамического сжатия Земли), данных сейсмологии (радиус ядра) и геологии (плотность поверхностного слоя Земли). Получаемые модели должны иметь «внутреннюю согласованность», то есть удовлетворять всем условиям их построения. Значит, для этих моделей необходимо вычислить стоксовы постоянные, которые должны совпасть с их принятыми ниже значениями (8). Последнее налагает конкретное условие на точность вычислений: все промежуточные вычисления нужно выполнять с удержанием десятого знака после запятой, с тем, чтобы степенные моменты были получены до девятого десятичного знака, так как определенные линейные комбинации степенных моментов дают стоксовые постоянные. В окончательных распределениях мы удерживаем пятые десятичные знаки (табл. 2), а при табличном задании усредненных одномерных моделей (табл. 1) ограничиваемся третьим десятичным знаком.

§ 7. Переходя к рассмотрению первой задачи, отмеченной в § 5, построим здесь улучшенную модель Земли, приняв за исходную модель ГБА (модель «А Буллена-Гутенберга») [9, с. 230—232]. Распределение плотности в исходной модели приведено во второй графе табл. 1. Для этой модели $\bar{\delta} = 2,74 \text{ г/см}^3$, $\bar{r} = 6361,5 \text{ км}$, радиус ядра $r_0 = 3473 \text{ км}$, $R = 6371 \text{ км}$. Необходимые стоксовые постоянные Земли возьмем согласно [10] $fM = 398600,9 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$, где $f = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$; $c_{10} = c_{11} = s_{11} = 0$; $c_{20} = -1082,639 \cdot 10^{-6}$; $c_{30} = 2,565 \cdot 10^{-6}$; $c_{40} = 1,608 \cdot 10^{-6}$;

$$\begin{aligned} c_{21} &= 0; & s_{21} &= 0; \\ c_{22} &= 1,536 \cdot 10^{-6}; & s_{22} &= -0,871 \cdot 10^{-6}; \\ c_{31} &= 1,847 \cdot 10^{-6}; & s_{31} &= 0,248 \cdot 10^{-6}; \\ c_{32} &= 0,287 \cdot 10^{-6}; & s_{32} &= -0,174 \cdot 10^{-6}; \\ c_{33} &= 0,092 \cdot 10^{-6}; & s_{33} &= 0,199 \cdot 10^{-6}; \\ c_{41} &= -0,446 \cdot 10^{-6}; & s_{41} &= -0,370 \cdot 10^{-6}; \\ c_{42} &= 0,078 \cdot 10^{-6}; & s_{42} &= 0,107 \cdot 10^{-6}; \\ c_{43} &= 0,055 \cdot 10^{-6}; & s_{43} &= -0,014 \cdot 10^{-6}; \\ c_{44} &= 0,001 \cdot 10^{-6}; & s_{44} &= 0,006 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь c_{nm} и s_{nm} — ненормированные стоксовы постоянные, переход к которым от нормированных был выполнен по известной формуле [10].

Одномерные модели Земли второго и четвертого порядков

Глубина ($R-r$) в км	$\delta_{B-\Gamma}$	$\delta_2^{B-\Gamma}(\rho)$	$\delta_4^{B-\Gamma}(\rho)$	$\delta_4(\rho)$	$\delta_4(\rho)$
1	2	3	4	5	6
0		2,723	2,723	2,724	2,724
	2,74				
19		2,762	2,762	2,761	2,761
	3,00				
38		2,801	2,801	2,799	2,799
	3,32				
50		2,821	2,821	2,817	2,817
	3,34				
60		2,840	2,840	2,836	2,836
	3,35				
70		2,859	2,859	2,854	2,854
	3,36				
80		2,879	2,879	2,873	2,873
	3,37				
90		2,898	2,898	2,891	2,891
	3,38				
100		2,917	2,917	2,910	2,910
	3,39				
125		2,965	2,965	2,956	2,956
	3,41				
150		3,013	3,013	3,002	3,001
	3,43				
175		3,060	3,060	3,047	3,047
	3,46				
200		3,108	3,108	3,092	3,092
	3,48				
225		3,155	3,155	3,138	3,138
	3,50				
250		3,202	3,202	3,183	3,183
	3,53				
300		3,295	3,295	3,272	3,272
	3,58				
350		3,388	3,388	3,361	3,361
	3,62				
400		3,480	3,480	3,449	3,449
	3,69				
450		3,571	3,571	3,536	3,536
	3,82				
500		3,661	3,661	3,623	3,623
	4,01				
600		3,840	3,839	3,794	3,794
	4,21				
700		4,015	4,015	3,962	3,962
	4,40				
800		4,187	4,187	4,127	4,127
	4,56				
900		4,356	4,356	4,289	4,289
	4,63				
1000		4,522	4,522	4,449	4,449
	4,74				
1200		4,845	4,845	4,758	4,758
	4,85				
1400		5,156	5,156	5,056	5,056
	4,96				
1600		5,455	5,455	5,342	5,342
	5,07				
1800		5,741	5,741	5,617	5,617
	5,19				
2000		6,015	6,015	5,879	5,879
	5,29				
2200		6,277	6,277	6,130	6,130
	5,39				

1	2	3	4	5	6
2400		6,526	6,526	6,369	6,370
2600	5,49	6,763	6,764	6,597	6,597
2800	5,59	6,988	6,989	6,812	6,813
2898	5,69 5,723	7,096	7,097	6,916	6,916
2898	9,375	8,983	8,983	9,435	9,434
3000	9,40	9,088	9,088	9,536	9,536
3500	9,55	9,566	9,566	9,994	9,993
4000	10,15	9,968	9,967	10,379	10,378
4500	10,7	10,293	10,292	10,690	10,690
4982	11,2	10,532	10,532	10,920	10,920
5121	11,5	10,589	10,589	10,974	10,974
6371	12,0 12,3	10,828	10,829	11,204	11,204

Опишем порядок вычислений. Сначала было построено нулевое приближение

$$\delta_0^{B-\Gamma} = \delta_{cp} I_{000} + h(1 - \rho_0^3) - \Theta h = 19,89691 - 17,15691 \Theta. \quad (9)$$

Как видно, нулевое приближение дает двухслойную модель Земли и зависит только от δ_{cp} и I_{000} . Далее было найдено

$$\delta_1^{B-\Gamma} = \delta_{cp} [I_{000} + 5\rho(I_{100} \sin \vartheta \cos \lambda + I_{010} \sin \vartheta \sin \lambda + I_{001} \cos \vartheta)] + h(1 - \rho_0^3) - \Theta h. \quad (10)$$

Так как начало координат принято у нас совпадающим с центром инерции Земли, то $I_{100} = I_{010} = I_{001} = 0$, и в силу этого $\delta_0 = \delta_1$.

Затем для исходной модели были вычислены степенные моменты плотности $I_{pqr}^{вмч}$ второго порядка, которые по методике [6] были уравнены с учетом условий, доставляемых гармониками (8). На основании уравненных моментов I_{pqr} по формуле

$$\begin{aligned} \delta_2(\rho, \vartheta, \lambda) = & \delta_{cp} \left\{ \frac{25}{4} I_{000} - \frac{35}{4} (I_{200} + I_{020} + I_{002}) + \frac{35}{4} \rho^2 [(3I_{200} + \right. \\ & + I_{020} + I_{002} - I_{000}) \sin^2 \vartheta \cos^2 \lambda + (I_{200} + 3I_{020} + I_{002} - I_{000}) \sin^2 \vartheta \sin^2 \lambda + \\ & + (I_{200} + I_{020} + 3I_{002} - I_{000}) \cos^2 \vartheta + 4I_{110} \sin^2 \vartheta \sin \lambda \cos \lambda] \} + \\ & + h \left[\frac{25}{4} (1 - \rho_0^3) - \frac{21}{4} (1 - \rho_0^5) + \frac{35}{4} \rho^2 (\rho_0^3 - \rho_0^5) \right] - \Theta h \end{aligned} \quad (11)$$

было построено $\delta_2^{B-\Gamma}(\rho, \vartheta, \lambda)$, данное во второй графе табл. 2. Степенные моменты для $\delta_2^{B-\Gamma}(\rho, \vartheta, \lambda)$ приведены в первых десяти строках второй графы табл. 3.

Потом за исходную модель была взята найденная модель $\delta_2^{B-\Gamma}(\rho, \vartheta, \lambda)$, и для нее были вычислены степенные моменты второго и третьего порядка $I_{pqr}^{вмч}$. Вычисленные моменты второго порядка не требуют уравни-

Трехмерные модели Земли второго и четвертого порядков

Элементы формулы	$\delta_2^{B-\Gamma}$ (ρ, θ, λ)	$\delta_3^{B-\Gamma}$ (ρ, θ, λ)	$\delta_4^{B-\Gamma}$ (ρ, θ, λ)	$\delta_2(\rho, \theta, \lambda)$	$\delta_3(\rho, \theta, \lambda)$	$\delta_4(\rho, \theta, \lambda)$
ρ^0	10,82834	10,82834	10,82856	11,20374	11,20374	11,20396
θ	-1,88729	-1,88729	-1,88621	-2,51938	-2,51938	-2,51830
$\rho \sin \theta \cos \lambda$	—	-0,00022	-0,00022	—	-0,00022	-0,00022
$\rho \sin \theta \sin \lambda$	—	-0,00053	-0,00053	—	-0,00053	-0,00053
$\rho \cos \theta$	—	0,00041	0,00041	—	0,00041	0,00041
$\rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda$	-8,06228	-8,06228	-14,07405	-8,43374	-8,43374	-16,45920
$\rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \lambda$	-8,06287	-8,06287	-14,07403	-8,43433	-8,43433	-16,45918
$\rho^2 \cos^2 \theta$	-8,16706	-8,16706	-14,17804	-8,53851	-8,53851	-16,56320
$-\rho^2 \sin^2 \theta \sin \lambda \cos \lambda$	0,00007	0,00007	0,00098	0,00007	0,00007	0,00098
$-\rho^2 \sin \theta \cos \theta \cos \lambda$	—	—	-0,00094	—	—	-0,00094
$-\rho^2 \sin \theta \cos \theta \sin \lambda$	—	—	-0,00012	—	—	-0,00012
ρ^2	1,87782	1,87782	7,88583	2,50673	2,50673	10,52841
$\rho^3 \sin^3 \theta \cos^3 \lambda$	—	0,00015	0,00015	—	0,00015	0,00015
$\rho^3 \sin^3 \theta \sin^3 \lambda$	—	0,00035	0,00035	—	0,00035	0,00035
$\rho^3 \cos^3 \theta$	—	-0,00027	-0,00027	—	-0,00027	-0,00027
$\rho^3 \sin^3 \theta \sin \lambda \cos^2 \lambda$	—	0,00174	0,00174	—	0,00174	0,00174
$\rho^3 \sin^2 \theta \cos \theta \cos^2 \lambda$	—	-0,00051	-0,00051	—	-0,00051	-0,00051
$\rho^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sin^2 \lambda$	—	-0,00151	-0,00151	—	-0,00151	-0,00151
$\rho^3 \sin^3 \theta \sin^2 \lambda \cos \lambda$	—	-0,00049	-0,00049	—	-0,00049	-0,00049
$\rho^3 \sin \theta \cos^2 \theta \cos \lambda$	—	0,00159	0,00159	—	0,00159	0,00159
$\rho^3 \sin \theta \cos^2 \theta \sin \lambda$	—	0,00092	0,00092	—	0,00092	0,00092
$\rho^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \lambda \cos \lambda$	—	-0,00061	-0,00061	—	-0,00061	-0,00061
$\rho^4 \sin^4 \theta \cos^4 \lambda$	—	—	5,41079	—	—	7,22311
$\rho^4 \sin^4 \theta \sin^4 \lambda$	—	—	5,41022	—	—	7,22254
$\rho^4 \cos^4 \theta$	—	—	5,41006	—	—	7,22238
$\rho^4 \sin^4 \theta \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda$	—	—	10,82088	—	—	14,44553
$\rho^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \lambda$	—	—	10,82030	—	—	14,44464
$\rho^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \lambda$	—	—	10,81824	—	—	14,44289
$-\rho^4 \sin^4 \theta \cos^3 \lambda \sin \lambda$	—	—	-0,00102	—	—	-0,00102
$-\rho^4 \sin^3 \theta \cos \theta \cos^3 \lambda$	—	—	-0,00045	—	—	-0,00045
$-\rho^4 \sin^4 \theta \sin^3 \lambda \cos \lambda$	—	—	-0,00006	—	—	-0,00006
$-\rho^4 \sin \theta \cos^3 \lambda \cos \lambda$	—	—	0,00202	—	—	0,00202
$-\rho^4 \sin^3 \theta \cos \theta \sin^3 \lambda$	—	—	-0,00063	—	—	-0,00063
$-\rho^4 \sin \theta \cos^3 \theta \sin \lambda$	—	—	0,00082	—	—	0,00082
$-\rho^4 \sin^3 \theta \cos \theta \sin \lambda \cos^2 \lambda$	—	—	0,00047	—	—	0,00047
$-\rho^4 \sin^3 \theta \cos \theta \sin^2 \lambda \cos \lambda$	—	—	0,00375	—	—	0,00375
$-\rho^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin \lambda \cos \lambda$	—	—	-0,00259	—	—	-0,00259
ρ^4	—	—	-5,40814	—	—	-7,22047

Примечание. В данной таблице приведены распределения плотности, указанные в головке. Каждое из них получается сложением произведений членов граф (1) из численные коэффициенты, данные в столбце соответствующего распределения. Например: $\delta_2(\rho, \theta, \lambda) = 11,20374 - 2,51938\theta - \rho^2(8,433745 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda + 8,43433 \sin^2 \theta \sin^2 \lambda + 8,53851 \cos^2 \theta + 0,00007 \sin^2 \theta \sin \lambda \cos \lambda - 2,50673)$.

нивания, так как найденные в соответствии с формулами из [3] их линейные комбинации дают значения стоксовых постоянных, совпадающие в пределах точности вычислений с принятыми их значениями (8). Моменты третьего порядка были уравнены и, с учетом полученных I_{pqr} , было построено $\delta_3^{B-\Gamma}(\rho, \theta, \lambda)$, которое отличается от $\delta_2^{B-\Gamma}(\rho, \theta, \lambda)$ наличием дополнительных членов при ρ и ρ^3 . Однако эти коэффициенты, как было отмечено выше, не влияют на нахождение h , поэтому $h_3 = h_2$. А ввиду того, что эти коэффициенты малы по величине (порядка 10^{-3}), то практически $\delta_3^{B-\Gamma}(\rho, \theta, \lambda)$ совпадает с $\delta_2^{B-\Gamma}(\rho, \theta, \lambda)$. Распределение $\delta_3^{B-\Gamma}(\rho, \theta, \lambda)$ приведено в третьей графе табл. 2. Взяв затем модель $\delta_3^{B-\Gamma}(\rho, \theta, \lambda)$ за исходную, аналогично были найдены $I_{pqr}^{выч}$ второго, третьего и четвертого порядков. Моменты четвертого порядка были урав-

Степенные моменты и моменты инерции моделей четвертого порядка

Моменты	$\delta_4^{B-\Gamma}(\rho, \theta, \lambda)$	$\delta_4(\rho, \theta, \lambda)$
Степенные		
I_{000}	1	1
I_{100}	0	0
I_{010}	0	0
I_{001}	0	0
I_{200}	0,166 800 859	0,165 261 193
I_{020}	0,166 794 713	0,165 255 048
I_{002}	0,165 715 147	0,164 175 482
I_{110}	-0,000 001 743	-0,000 001 743
I_{101}	0	0
I_{011}	0	0
I_{300}	-0,000 000 253	-0,000 000 253
I_{210}	0,000 001 391	0,000 001 391
I_{201}	-0,000 000 126	-0,000 000 126
I_{120}	-0,000 000 821	-0,000 000 821
I_{111}	-0,000 000 348	-0,000 000 348
I_{102}	0,000 001 579	0,000 001 579
I_{030}	-0,000 000 612	-0,000 000 612
I_{021}	-0,000 001 273	-0,000 001 273
I_{012}	0,000 000 443	0,000 000 443
I_{003}	0,000 000 466	0,000 000 466
I_{400}	0,064 444 619	0,063 707 235
I_{310}	-0,000 000 463	-0,000 000 463
I_{301}	0,000 000 437	0,000 000 437
I_{220}	0,021 480 838	0,021 235 044
I_{211}	-0,000 000 037	-0,000 000 037
I_{202}	0,021 360 801	0,021 115 006
I_{130}	-0,000 000 767	-0,000 000 767
I_{121}	-0,000 000 294	-0,000 000 294
I_{112}	0,000 000 010	0,000 000 010
I_{103}	-0,000 000 339	-0,000 000 339
I_{040}	0,064 440 573	0,063 703 189
I_{031}	0,000 000 234	0,000 000 234
I_{022}	0,021 359 819	0,021 114 019
I_{013}	-0,000 000 222	-0,000 000 222
I_{004}	0,063 720 876	0,062 983 492
Инерции (главные)		
Ax		0,329 430 530
Bu	} безразмерные	0,329 436 675
C		0,330 516 241
Ax	} размерные	0,798 723 022 · 10 ³⁸ кг·м ²
Bu		0,798 737 933 · 10 ³⁸ кг·м ²
C		0,801 355 387 · 10 ³⁸ кг·м ²

нены, и по (5) и (7) было получено распределение $\delta_4^{B-\Gamma}(\rho, \theta, \lambda)$, данное в четвертой графе табл. 2. Степенные моменты для полученной модели $\delta_4^{B-\Gamma}(\rho, \theta, \lambda)$ приведены в третьей графе табл. 3. В табл. 1 дано одномерное распределение плотности земных недр, построенное по моделям $\delta_2^{B-\Gamma}(\rho)$ и $\delta_4^{B-\Gamma}(\rho)$ (6). Как видно из таблицы, значения плотности на соответствующих глубинах для $\delta_2^{B-\Gamma}(\rho)$ и $\delta_4^{B-\Gamma}(\rho)$ совпадают с точностью до $1 \cdot 10^{-3}$. Это говорит о быстрой сходимости последовательности моделей $\delta_0^{B-\Gamma}$, $\delta_1^{B-\Gamma}$, $\delta_2^{B-\Gamma}$, $\delta_3^{B-\Gamma}$, $\delta_4^{B-\Gamma}$.

§ 8. Рассмотрим теперь вторую задачу, указанную в § 5, дающую приближенное решение обратной задачи теории потенциала, в которой по известному внешнему гравитационному полю Земли (8) находится распределение плотности земных недр. При этом дополнительно воспользуемся динамическим сжатием H Земли. Вычисления, представляющие

решение этой задачи, аналогичны описанным в § 7 и отличаются от них лишь используемой исходной моделью.

Отметим очевидный факт: находимые здесь δ_0 и δ_1 , совпадают с ранее найденными δ_0^{B-G} и δ_1^{B-G} , ибо вычисляются по тем же формулам (9) и (10) при одинаковых исходных данных.

Построим трехмерную модель $\delta_2(\rho, \theta, \lambda)$. Степенные моменты I_{200} , I_{020} , I_{002} были найдены строго в [6] на основании stokсовых постоянных и динамического сжатия Земли $H=0,0032756$. Зная все степенные моменты до второго порядка и пользуясь теми же значениями δ , r и r_0 , что и в § 7, было построено распределение $\delta_2(\rho, \theta, \lambda)$, данное в пятой графе табл. 2. Степенные моменты этой модели приведены в первых десяти строках третьей графы табл. 3.

Затем исходной была модель $\delta_2(\rho, \theta, \lambda)$, и, как в § 7, было получено следующее приближение $\delta_3(\rho, \theta, \lambda)$, а потом на основе $\delta_3(\rho, \theta, \lambda)$ — последующее $\delta_4(\rho, \theta, \lambda)$. Распределения $\delta_3(\rho, \theta, \lambda)$ и $\delta_4(\rho, \theta, \lambda)$ приведены в шестой и седьмой графах табл. 2, а степенные моменты модели $\delta_4(\rho, \theta, \lambda)$ даны в третьей графе табл. 3. В табл. 1 показано изменение плотности земных недр с глубиной для одномерных моделей $\delta_2(\rho)$ и $\delta_4(\rho)$. Так же, как и у моделей $\delta_2^{B-G}(\rho)$ и $\delta_4^{B-G}(\rho)$, здесь значения плотности совпадают с точностью до $1 \cdot 10^{-3}$, что опять подтверждает быстроту сходимости последовательности распределений δ_0 , δ_1 , δ_2 , δ_3 , δ_4 .

§ 9. Как было уже отмечено, всякая модель Земли, претендующая на достоверность, должна быть «внутренне согласованной». Например, значение массы модели Земли обязано совпадать со значением массы реальной Земли. Посмотрим, как обстоит дело с внутренней согласованностью модели ГБА. При ее построении используется, к примеру, значение динамического сжатия Земли. А сама модель (впрочем, это относится ко всем сферическим симметричным моделям) имеет динамическое сжатие, равное нулю. Далее, все stokсовые постоянные ее, кроме постоянной нулевого порядка, отвечающей заданию массы модели, также равны нулю. Одним словом, эта модель, с механической точки зрения внутренне не согласована и причина этого ясна — при ее построении использован ряд гипотетических предположений [2, 7 и др.], в том числе постулирование сферической симметрии ее.

Обращаясь к построенным здесь моделям, именно, к моделям табл. 2 и к степенным моментам их в табл. 3, легко обнаружить, что каждая из этих моделей имеет все геодезические параметры, совпадающие с их принятыми значениями (8): это относится и к массе, и ко всем остальным stokсовым постоянным, а в случае моделей δ_2 и δ_4 также и к динамическому сжатию.

Таким образом, каждая из этих трехмерных моделей Земли оказывается полностью внутренне согласованной моделью. Получая из этих моделей осредненные одномерные модели, приведенные в табл. 1, видим, что и краевое условие для них оказывается хорошо выполненным.

Конечно, любая одномерная (сферически симметричная) модель Земли не может описать ее действительного строения, так как последнее по своей природе трехмерно. Однако из множества сферически симметричных моделей естественно взять такую одномерную модель, которая является результатом осреднения трехмерной модели, удовлетворяющей большинству известных факторов о Земле, имеющих механическое содержание. Мы здесь построили не одну, а две таких модели $\delta_2^{B-G}(\rho, \theta, \lambda)$ и $\delta_4(\rho, \theta, \lambda)$. Поэтому, не делая выбора какой-либо одной из них, скажем, что каждая одномерная модель $\delta_2^{B-G}(\rho)$ и $\delta_4(\rho)$ определена ближе к истине, чем хотя бы модель ГБА.

§ 10. В данной работе получено, по сути дела, две модели: трехмерная уточненная модель ГБА (графы вторая, третья, четвертая

табл. 2) и новая трехмерная модель (графы пятая, шестая, седьмая той же таблицы), и как следствие, одномерные модели, им соответствующие, приведенные в табл. 1. Из каждой последовательности моделей δ_0 , δ_1 , δ_2 , δ_3 , δ_4 и $\delta_0^{B-\Gamma}$, $\delta_1^{B-\Gamma}$, $\delta_2^{B-\Gamma}$, $\delta_3^{B-\Gamma}$, $\delta_4^{B-\Gamma}$, безусловно, предпочитаем последние, именно δ_4 и $\delta_4^{B-\Gamma}$. Однако при этом отмечаем поразительный факт сходимости этих последовательностей, наглядно проявляющийся сравнением числовых значений плотности на одинаковых глубинах в табл. 1. А если еще вспомнить факт сходимости рядов Фурье по ортогональным системам многочленов, то становится очевидным, что на данном этапе состояния наших знаний о Земле учитывать в обсуждаемой проблеме стоксовы постоянные пятого, шестого и более высоких порядков пока нет необходимости. Это подтверждается также и следующим.

Округлим в распределениях плотности $\delta_2^{B-\Gamma}$ и δ_2 (табл. 2) коэффициенты до 0,001, тогда — после приведения подобных членов — получим двумерные распределения, зависящие только от ρ , θ , то есть горизонтальные неоднородности по долготе не превосходят 0,001 г/см³ и все их влияние на гравитационное поле Земли отражается стоксовыми постоянными второго порядка.

Округлим теперь также до 0,001 все коэффициенты в распределениях $\delta_4^{B-\Gamma}$ и δ_4 (см. табл. 2). Замечаем, что члены при ρ^2 опять дают двумерное распределение от ρ и θ , а члены при ρ^4 выражают только одномерное распределение, зависящее от ρ . Таким образом, приходим к выводу, что горизонтальные неоднородности в глобальном масштабе (как по широте, так и по долготе) полностью объясняют стоксовы постоянные второго порядка, знание которых, вместе с H , в свою очередь, позволяет выявить эти неоднородности.

Выводы последних двух абзацев могут показаться спорными. Для окончательного подтверждения этих выводов надо еще исключить влияние коры на значения параметров гравитационного поля.

§ 11. Сравним, наконец, распределения $\delta_4^{B-\Gamma}$ и δ_4 . При их построении специально были использованы одни и те же значения нужных параметров, поэтому при выполняемом сравнении влияние неточностей этих параметров исключается. Каждая из двух рассматриваемых моделей содержит в себе группу ошибок, обусловленных учетом стоксовых постоянных всех высших порядков, начиная с $n=5$ (ошибки метода решения задачи), и совокупность ошибок собственно вычислений, включая сюда и ошибки получения квадратических приближений степенных моментов. Так как о первой группе ошибок была речь в предыдущем параграфе и они одинаково влияют на обе полученные модели, то остается исследовать только ошибки второй группы, то есть ошибки степенных моментов и ошибки вычисления плотности по использованным при этом формулам.

Для модели $\delta_4^{B-\Gamma}$ степенные моменты второго, третьего и четвертого порядков находились уравниванием вычисленных моментов сначала модели ГБА (а затем $\delta_2^{B-\Gamma}$ и $\delta_3^{B-\Gamma}$) за условия, доставляемые линейными соотношениями между моментами, следуемыми из выражений стоксовых постоянных. Принятый метод уравнивания позволяет [4] найти средние квадратические ошибки (m) уравненных моментов по известной формуле, имеющей в данном случае вид

$$m_{l_{pqr}} = \sqrt{\frac{\sum_{p+q+r=n} (I_{pqr}^{\text{выч}} - I_{pqr})^2}{2n+1}},$$

вычисления по которой дают

$$m_{I_{240}} = m_{I_{020}} = m_{I_{002}} = \pm 0,40 \cdot 10^{-3}. \quad (12)$$

Для второго же ряда моделей (δ_2 и δ_4) указанные степенные моменты вычислялись по приведенным в [6] формулам, содержащим получаемые из наблюдений величины c_{20} , c_{22} и H . Принимая $m_{c_{20}} = 0,1 \cdot 10^{-7}$, $m_{c_{22}} = 0,2 \cdot 10^{-7}$, следуемые из многочисленных работ последних лет различных авторов [8], по известным формулам теории ошибок легко получаем

$$m_{I_{200}} = m_{I_{020}} = \pm 0,33 \cdot 10^{-5}, \quad m_{I_{002}} = \pm 0,65 \cdot 10^{-5}. \quad (13)$$

Модели третьего и четвертого порядков строятся на основе моделей второго порядка, поэтому ошибки (12) и (13) можно трактовать ошибками исходных моделей, используемых при построении уточненной трехмерной ГБА и новой трехмерной модели Земли.

Заметим, что по известным правилам теории ошибок, приняв полученные выше (12) и (13) ошибки моментов второго порядка, можно найти средние квадратические ошибки вычисления плотности по формуле (11), которые оказываются равными

$$m_{\delta_2^{B-G}} = \pm 0,1 \text{ г/см}^3 \text{ и } m_{\delta_4} = \pm 0,001 \text{ г/см}^3. \quad (14)$$

Сравнивая модели δ_4^{B-G} и δ_4 , приходится относить различия в них только за счет отличия исходных моделей, констатируя тем самым определенную зависимость получаемых данным методом распределений от исходных моделей. Кстати, громоздкая и не выписанная здесь формула, по которой вычислены ошибки (14), раскрывает сущность одной из причин неустойчивости решения обсуждаемой задачи как проблемы некорректной: при вычислении δ_2 величина ошибок (14) искомых распределений уменьшилась на два порядка относительно ошибок используемых моментов (12) и (13). Отсюда следуют высокие требования к точности необходимой информации и, в первую очередь, к выводу динамического сжатия Земли.

На основании вычисленных ошибок (12), (13) и (14) заключаем, что следует отдать предпочтение модели $\delta_4(\rho, \theta, \lambda)$, как более отвечающей истинному распределению недр оболочки и ядра Земли сравнительно с другими рассмотренными здесь модельными распределениями плотности. В третьей графе табл. 3 для распределения $\delta_4(\rho, \theta, \lambda)$ приведены значения степенных моментов до четвертого порядка и главных моментов инерции. Данное распределение в пределах точности использованных параметров удовлетворяет 27 условиям: это — суть условие плотности поверхностного слоя Земли, 25 условий, следуемых из задания стоксовых постоянных до четвертого порядка включительно, и условие сохранения динамического сжатия Земли.

Отметим основные особенности этого распределения: 1) плотность в центре Земли имеет значение $11,20 \text{ г/см}^3$, что на $1-2 \text{ г/см}^3$ меньше значений, принятых в известных моделях Земли; 2) скачок плотности на границе «ядро—мантия» составляет $2,52 \text{ г/см}^3$, и данное значение также отличается от значений скачка, даваемого другими моделями.

Эти особенности присущи и другим распределениям (табл. 2 и 1), и они обусловлены тем, что мы учли здесь только один скачок плотности — скачок на границе «ядро—мантия». Для построения более реальных моделей Земли (см. начало § 3) необходимо учитывать также другие — уже выявленные — скачки плотности, и в первую очередь, скачок на границе Мохоровичича. Поэтому полученные выше модельные распределения не могут считаться окончательными. Они обсуждены здесь при исследовании нового метода нахождения плотности земных недр и для иллюстрации его возможностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961.
2. Жарков В. Н., Трубицин В. П., Самсоненко П. В. Физика Земли и планет. Фигуры и их внутреннее строение. М., «Наука», 1971.
3. Жонголович И. Д. Потенциал земного притяжения. — «Бюл. ИТА», 1957, т. 6, № 8(81).
4. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Государственное изд-во физ.-мат. литературы, 1958.
5. Мещеряков Г. А. Динамическая фигура Луны и распределение плотности лунных недр. — «Астрономический журнал», 1973, т. 50, № 1.
6. Мещеряков Г. А. Использование стоксовых постоянных Земли при уточнении ее механических моделей. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1975, вып. 21.
7. Паньков В. Л., Жарков В. Н. О распределении плотности в недрах Земли. — В сб. Земные приливы и внутреннее строение Земли. М., «Наука», 1967.
8. Пеллинен Л. П. Исследование гравитационных полей и формы Земли, других планет и Луны по наблюдениям космических аппаратов. — «Итоги науки. Серия Космонавтика», М., 1972.
9. Собственные колебания Земли. М., «Мир», 1964.
10. Стандартная Земля. М., «Мир», 1969.
11. Hildebrandt T., Shoenberg J. On linear functional operators and the moments problem for a finite interval in one or several dimension. — Ann. of Math., v. 34, 1933, № 1.

Работа поступила 2 октября 1973 года.
Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.