МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1965 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 2

Л. И. КОРДЮК

СВЯЗЬ АЗИМУТА НА СФЕРОИДЕ С АЗИМУТОМ НА ПЛОСКОСТИ

Как известно, связь азимута на карте с соответствующим азимутом на сфероиде приводится в следующих видах [1]:

$$\operatorname{tg} \bar{A} = \frac{h \operatorname{tg} A}{\bar{e} V^2 \cos B + f \operatorname{tg} A} \tag{1}$$

или [2]

$$\operatorname{tg} \bar{A} = \frac{n \sin i \operatorname{tg} A}{m + n \cos i \operatorname{tg} A}, \tag{2}$$

а также при $i = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, имеем:

$$\operatorname{tg} \bar{A} = \frac{n \cos \varepsilon \operatorname{tg} A}{m + n \sin \varepsilon \operatorname{tg} A}, \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} \bar{e} = \left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2; \\ f = \frac{\partial x}{\partial B}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial B}\frac{\partial y}{\partial l}; \\ h = \frac{\partial x}{\partial B}\frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial y}{\partial B} \end{gathered} \tag{4}$$

— коэффициенты первой квадратичной формы проекции;
$\bar{A}$ — азимут элемента $\bar{ds}$ на плоскости;
A — азимут элемента ds на сфероиде;
m и n — масштабы по меридиану и параллели;
i — угол на карте между изображениями меридиана и параллели;
ε — уклонение от $\frac{\pi}{2}$ угла между меридианом и параллелью;
B — географическая широта;
l — долгота от среднего меридиана страны.

Вычисления с помощью (1), (2) и (3) затруднительны, особенно при A, близком к $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$. Более удобно при малых искажениях вычислять малую величину $(\bar{A}-A)$, т. е. искажение азимута, а затем азимут на карте будет:

$$\bar{A}=A+(\bar{A}-A).$$

Для простоты, обобщая (1), (2) и (3), запишем:

$$\operatorname{tg} y=\frac{a \operatorname{tg} x}{b+\operatorname{ctg} x}, \tag{5}$$

где a, b и c — коэффициенты, удовлетворяющие следующим условиям:

$$0<b<a; \text{ (или } 0<a<b);$$

$$-1<c<+1;$$

при

$$\frac{a}{b}=1\pm\sigma,$$

где σ — малая величина.

Для вывода из (5) рабочей формулы воспользуемся формулами Эйлера [3]:

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}; \tag{а}$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}; \tag{б}$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{e^{2ix}-1}{i(e^{2ix}+1)}, \tag{в}$$

где $i=\sqrt{-1}$;

e — основание натуральных логарифмов.

Применяя (в) к выражению (5), вначале напишем:

$$\frac{e^{2iy}-1}{e^{2iy}+1}=\frac{ai(e^{2ix}-1)}{bi(e^{2ix}+1)+c(e^{2ix}-1)}.$$

Решая это выражение относительно e^{2iy} получим:

$$e^{2iy}=\frac{ai(e^{2ix}-1)+bi(e^{2ix}+1)+c(e^{2ix}-1)}{-ai(e^{2ix}-1)+bi(e^{2ix}+1)+c(e^{2ix}-1)}.$$

После преобразований найдем:

$$e^{2iy}=e^{2ix}\frac{1-pe^{-2ix}-q}{1-pe^{2ix}-q_1}, \tag{6}$$

где

$$p=\frac{a-b}{a+b},$$

$$q=\frac{c(e^{-2ix}-1)}{i(a+b)}; \tag{7}$$

$$q_1=\frac{-c(e^{2ix}-1)}{i(a+b)}.$$

Из (6) имеем:

$$e^{2i(y-x)} = \frac{1-pe^{-2ix}-q}{1-pe^{2ix}-q_1}. \tag{8}$$

Легко заметить, что p, q и q_1 — малые величины, каждая из них меньше единицы. Поэтому формулу (8) удобно разложить в ряд.

Логарифмируя (8) и разлагая в ряды правую часть этого выражения, после преобразований, найдем:

$$2i(y-x) = p(e^{2ix}-e^{-2ix}) + (q_1-q) + \frac{p^2}{2}(e^{4ix}-e^{-4ix}) + p(q_1e^{2ix}-qe^{-2ix}) +$$

$$+\frac{1}{2}(q_1^2-q^2) + \frac{p^3}{3}(e^{6ix}-e^{-6ix}) + p^2(q_1e^{4ix}-qe^{-4ix}) + p(q_1^2e^{2ix}-qe^{-2ix}) +$$

$$+\frac{1}{3}(q_1^3-q^3) + \frac{p^4}{4}(e^{8ix}-e^{-8ix}) + \ldots \tag{9}$$

Подставляя значения q и q_1 из (7) в (9) и учитывая (а) и (б), получим:

$$y-x = p\sin 2x + 2t\sin^2 x + \frac{p^2}{2}\sin 4x + pt(\cos 2x - \cos 4x) +$$

$$+\frac{t^2}{2}(2\sin 2x - \sin 4x) + \frac{p^3}{3}\sin 6x + \frac{p^4}{4}\sin 8x + \ldots, \tag{10}$$

где

$$p = \frac{a-b}{a+b};$$

$$t = \frac{-c}{a+b}. \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) являются разложением в ряд (5) в функции $y=F(x)$. Если необходимо найти разложение в функции $x=\psi(y)$, то из (5) имеем:

$$\operatorname{tg} x = \frac{b\operatorname{tg} y}{a+(-c)\operatorname{tg} y}. \tag{12}$$

Аналогично (5), (10) и (11) для (12) разложение в ряд будет:

$$x-y = p_1\sin 2y + 2t_1\sin^2 y + \frac{p_1^2}{2}\sin 4y + p_1t_1(\cos 2y - \cos 4y) +$$

$$+\frac{t_1^2}{2}(2\sin 2y - \sin 4y) + \frac{p_1^3}{3}\sin 6y + \frac{p_1^4}{4}\sin 8y + \ldots, \tag{13}$$

где

$$p_1 = \frac{b-a}{b+a} = -p;$$

$$t_1 = \frac{c}{b+a} = -t. \tag{14}$$

Из (5), (12) и их разложений следуют правила: чтобы получить обратную связь, т. е. $x=\psi(y)$, необходимо: а) в разложении (10) x и y

поменять местами и аргумент x в sin заменить на y; б) коэффициенты p и t заменить соответственно на p_1 и t_1, где

$$p_1 = -p;$$
$$t_1 = -t,$$

т. е. для p и t в нечетных степенях — поменять знак на обратный.

В разложении (10) и (13) при отношении $\frac{a}{b}$, близком к $+1$, величины p, p_1, t и t_1, согласно (11) и (14), — малые величины и ряды (10) и(13) быстро сходятся.

Теперь на основании (5), (10) и (11) запишем для (1) и (3) разложение в следующем виде:

$$\bar{A} - A = p \sin 2A + 2t \sin^2 A + \frac{p^2}{2} \sin 4A + pt(\cos 2A - \cos 4A) + \frac{t^2}{2}(2 \sin 2A - \sin 4A) + \frac{p^3}{3} \sin 6A + \frac{p^4}{4} \sin 8A + \ldots, \tag{15}$$

где для формулы (1) имеем:

$$p = \frac{h - \bar{e}V^2 \cos B}{h + \bar{e}V^2 \cos B}; \qquad t = \frac{-f}{h + \bar{e}V^2 \cos B}. \tag{16}$$

Для (3) p и t примут вид:

$$p = \frac{n \cos \varepsilon - m}{n \cos \varepsilon + m}; \qquad t = \frac{-n \sin \varepsilon}{n \cos \varepsilon + m}. \tag{17}$$

Следовательно, азимут на плоскости вычисляется с помощью (15) и (16) по коэффициентам первой квадратичной формы и азимуту на сфероиде. С помощью (15) и (17) тот же азимут вычисляют по масштабам проекции, углу ε и азимуту на сфероиде.

При $c=0$ формулы (5), (10) и (11) примут вид:

$$\operatorname{tg} y = \frac{a}{b} \operatorname{tg} x, \tag{18}$$

$$y - x = p \sin 2x + \frac{p^2}{2} \sin 4x + \frac{p^3}{3} \sin 6x + \ldots, \tag{19}$$

где

$$p = \frac{a-b}{a+b}. \tag{20}$$

Формулы (12), (13) и (14) при $c=0$ примут вид:

$$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a} \operatorname{tg} y, \tag{21}$$

$$x - y = p_1 \sin 2y + \frac{p_1^2}{2} \sin 4y + \frac{p_1^3}{3} \sin 6y + \ldots, \tag{22}$$

где

$$p_1 = -p.$$

При $c=0$ имеем частный случай, который соответствует проекциям с ортогональной картографической сеткой, т. е. $f=0$ (или $\varepsilon=0$). При этом выражения (15) и (17) примут вид:

$$\overline{A}-A=p\sin 2A+\frac{p^2}{2}\sin 4A+\frac{p^3}{3}\sin 6A+\ldots, \tag{23}$$

где

$$p=\frac{a-b}{a+b}, \tag{24}$$

a и b — экстремальные масштабы.

Формулы (18), (19) и (20) также удобно применять к некоторым задачам высшей геодезии. Так, например, связь геодезической широты B с геоцентрической широтой Φ имеет вид [4]:

$$\operatorname{tg}\Phi=(1-e^2)\operatorname{tg}B. \tag{25}$$

Тогда, согласно (18) и (19), для (25) разложение в ряд будет:

$$\Phi-B=p\sin 2B+\frac{p^2}{2}\sin 4B+\frac{p^3}{3}\sin 6B+\ldots, \tag{26}$$

где p с помощью (20) примет вид:

$$p=\frac{-e^2}{2-e^2}. \tag{27}$$

Связь приведенной широты u с геодезической широтой B имеет вид [4]:

$$\operatorname{tg}u=\sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}B. \tag{28}$$

Для (28) разложение будет:

$$u-B=p\sin 2B+\frac{p^2}{2}\sin 4B+\frac{p^3}{3}\sin 6B+\ldots, \tag{29}$$

где

$$p=\frac{\sqrt{1-e^2}-1}{\sqrt{1-e^2}+1}. \tag{30}$$

Полученные формулы (26) и (29) приведены в [4].

В некоторых задачах сферической и практической астрономии приходится решать малый сферический треугольник [5]:

$$\operatorname{tg}c=\cos B\operatorname{tg}a. \tag{31}$$

Тогда на основании (18), (19) и (20) для (31) запишем:

$$c-a=p\sin 2a+\frac{p^2}{2}\sin 4a+\frac{p^3}{3}\sin 6a+\ldots, \tag{32}$$

где

$$p=\frac{\cos B-1}{\cos B+1}=-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}, \tag{33}$$

B — угол, малая величина;
a — гипотенуза малого сферического треугольника;
c — катет треугольника.

Для

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{\cos B} \operatorname{tg} c \tag{34}$$

разложение будет:

$$a - c = p \sin 2c + \frac{p^2}{2} \sin 4c + \frac{p^3}{3} \sin 6c + \ldots, \tag{35}$$

где

$$p = \frac{1 - \cos B}{1 + \cos B} = \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}. \tag{36}$$

В приведенных разложениях величины углов даны в аналитической мере. Количество членов в разложении зависит от принятой точности вычислений и величины p. Для картографических целей, как правило, достаточно ограничиться двумя или тремя членами разложения; в высшей геодезии и астрономии — тремя или четырьмя членами разложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Д. Соловьев. Картографические проекции. Геодезиздат, М., 1946.
2. А. П. Ющенко. Картография. Изд-во Главсевморпути, Л.—М., 1941.
3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, том. I. М., 1952.
4. Ф. Н. Красовский. Избранные сочинения, том IV. Геодезиздат, М., 1955.
5. С. Н. Блажко. Курс сферической астрономии. М., 1954.

Работа поступила
26 октября 1964 г.