МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1967 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 6

*М. И. МАРЫЧ*

# ПРИВЕДЕНИЕ ФОРМУЛЫ В. В. БРОВАРА, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФИГУРУ ЗЕМЛИ, К РЯДУ ТЕЙЛОРА

В своей работе [1] В. В. Бровар предложил новый метод решения задачи Молоденского *. Его формула для возмущающего потенциала на физической поверхности Земли оказалась более простой, чем формула Молоденского [4]. Нашими исследованиями показано [3], что предложенный М. С. Молоденским процесс последовательных приближений для решения задачи сводится к разложению возмущающего потенциала в ряд Тейлора по степеням высоты рельефа Земли. Было также установлено, что если при получении двух первых приближений для возмущающего потенциала методом Молоденского удержать все величины третьего порядка малости, которые при вычислении отклонений отвеса создают малые величины второго порядка, то сумма этих приближений представляет собой ни что иное как сумму первых двух членов упомянутого ряда. В настоящей статье будет показано, что и метод В. В. Бровара приводит к тем же результатам. Предварительно вкратце изложим этот метод.

В. В. Бровар несколько по-другому, чем М. С. Молоденский, решает задачу определения возмущающего потенциала на физической поверхности Земли. Вместо интегрального уравнения относительно плотности потенциала простого слоя он оригинальным путем получает соотношения:

$$T = \frac{1}{4\pi} \int \mu \left[ S(\rho_0, \psi, \rho) - \frac{1}{\rho_0} \right] d\sigma, \tag{1}$$

$$\frac{R^2}{\rho^2} \cos^2 \alpha \mu = \delta g_0 + \frac{1}{4\pi\rho_0} \int \mu \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^3} d\sigma. \tag{2}$$

Здесь приняты обозначения: $T$ — возмущающий потенциал на физической поверхности Земли, $\psi$ — угол, образованный радиусами-векторами $\rho_0$ и $\rho$ данной и текущей точек этой же поверхности,

$$S(\rho_0, \psi, \rho) - \frac{1}{\rho_0} = \frac{2}{r} - \frac{5\rho\cos\psi}{\rho_0^2} - \frac{3r}{\rho_0^2} - \frac{3\rho\cos\psi}{\rho_0^2} \ln \frac{\rho_0 + r - \rho\cos\psi}{2\rho_0}, \tag{3}$$

$\alpha$ — угол наклона в данной точке, образованный направлениями радиуса-вектора и нормали к земной поверхности, $d\sigma$ — элемент поверх-

* Задачу определения возмущающего потенциала на физической поверхности Земли по праву можно назвать задачей Молоденского. Благодаря ему, вот уже на протяжении двадцати лет ряд ученых трудится над решением этой проблемы. (*Примечание редактора*).

ности сферы, радиус которой $R$ равен радиусу Земли, $r$ — расстояние между данной и текущей точками физической поверхности Земли,

$$\frac{dT}{d\rho}+\frac{2T}{\rho}=-\delta g_0$$

граничное условие, составленное для точек земной поверхности, $\mu$ — функция, являющаяся решением интегрального уравнения (2). При этом требуется соблюдение условия

$$\int \mu\rho\cos\psi d\sigma=0,$$

вытекающего из того обстоятельства, что возмущающий потенциал является гармонической функцией. Выполнено также упрощение ядер интегралов, входящих в (1) и (2). Так, положив $\rho=R+H$, $\rho_0=R+H_0$ и отбросив величины порядка $\frac{H}{R}$, автор получает

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{H-H_0}{r_0}\right)^2+\dots\right] \tag{4}$$

и

$$\frac{\rho^2-\rho_0^2}{4\pi\rho_0 r^3}=\frac{H-H_0}{2\pi r_0^3}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{H-H_0}{r_0}\right)^2+\dots\right], \tag{5}$$

где $r_0$ — расстояние между проекциями данной и текущей точек на сферу радиуса $R$. Путем разложения функции $S(\rho_0, \psi, \rho)$ в ряд Тейлора по степеням $H-H_0$, найдено

$$S(\rho_0, \psi, \rho)-\frac{1}{\rho_0}=\frac{S(\psi)-1}{R}-\frac{(H-H_0)^2}{r_0^3}+\dots, \tag{6}$$

где $S(\psi)$ — известная функция Стокса. Следует заметить, что в формуле (4) пропущены члены, содержащие высоты $H_0$ и $H$ в первой степени. Однако они не повлияли на значения членов такого же вида в выражении (5). Относительно выражения (6) вопрос будет рассмотрен ниже.

Интегральное уравнение (2) решается методом Молоденского [4]. Вводится новая краевая поверхность, радиус-вектор которой $\bar{\rho}=R+kH$ $(0\leqslant k\leqslant 1)$. Для этой поверхности уравнение (2) сохраняется. В нем только заменяется $\mu$ на $\bar{\mu}$, $H_0$ на $kH_0$, $H$ на $kH$ и $\cos^2\alpha$ на $\overline{\cos^2\alpha}=1-k^2\operatorname{tg}^2\alpha+\dots$ Величина $\bar{\mu}$ представлена в виде ряда, сходящегося при $k=1$:

$$\bar{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n\mu_n. \tag{7}$$

Подстановка соотношений (5) и (7) в (2) приводит к равенствам, которые должны соблюдаться при любом $k$. Поэтому множители при $k^n$ в обоих частях равенств должны быть равны. Таким образом, получены приближения для функции $\mu$ в виде:

$$\mu_0=\delta g_0,$$

$$\mu_1=\frac{1}{2\pi}\int \mu_0\frac{H-H_0}{r_0^3}d\sigma, \tag{8}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Теперь, принимая в формуле (1) $T=\sum_{n=0}^{\infty}k^n T_n$ и подставляя сюда соотношения (6) и (7), В. В. Бровар находит приближения для возмущающего потенциала на физической поверхности Земли:

$$T_0=\frac{1}{4\pi R}\int\mu_0[S(\psi)-1]\,d\sigma, \tag{9}$$

$$T_1=\frac{1}{4\pi R}\int\mu_1[S(\psi)-1]\,d\sigma,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

причем

$$T=T_0+T_1+\ldots \tag{10}$$

Рассмотрим приведенные формулы. Следует отметить, что нулевое приближение, то есть $T_0$, получилось такое, как и в формуле Молоденского [4]. Несовпадение формул начинается с первого приближения. В нашей работе [3] показано, что в формуле Молоденского после сохранения всех величин третьего порядка малости, содержащих высоту $H$ в первой степени

$$T_0+T_1=\frac{1}{4\pi R}\int\left(\delta g_0-H\frac{d\Delta g}{dH}\right)[S(\psi)-1]\,d\sigma-\left(\delta g_0+\frac{2T_0}{R}\right)H=T_r+\frac{dT}{dH}H, \tag{11}$$

то есть $T_0+T_1$ представляет собой сумму двух первых членов разложения возмущающего потенциала в ряд Тейлора по степеням высоты рельефа Земли. Формула же (10) приводится к следующему виду:

$$T_0+T_1=\frac{1}{4\pi R}\int\left(\delta g_0-H\frac{d\Delta g}{dH}\right)[S(\psi)-1]\,d\sigma-\delta g_0 H. \tag{12}$$

Таким образом, разность значений первых приближений для возмущающего потенциала, полученных по формулам (11) и (12), равна

$$\delta T=-\frac{2H}{R}T_0.$$

Эта третьего порядка малости величина создает при вычислении отклонений отвеса большую величину [2, 3].

Исправим формулу (12) и, следовательно, формулу (10). Для этого при упрощении ядра интеграла (1) следует сохранить все величины, содержащие $H_0$ и $H$ в первой степени. В этом случае

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\left(1-\frac{1}{2}\frac{H_0+H}{R}\right),$$

$$\rho_0=R+H_0,\ \rho=R+H,$$

$$\frac{1}{\rho_0^2}=\frac{1}{R^2}\left(1-\frac{2H_0}{R}\right),\quad r=r_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{H_0+H}{R}\right),$$

где

$$r_0=2R\sin\frac{\psi}{2}.$$

и формула (3) принимает вид

$$S(\rho_0,\ \psi,\ \rho)-\frac{1}{\rho_0}=\frac{2}{r_0}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{H_0+H}{R}\right)-\frac{5\cos\psi}{R}\left(1-\frac{2H_0-H}{R}\right)-$$

$$-\frac{3r_0}{R^2}\left(1-\frac{3H_0-H}{2R}\right)-\frac{3(R+H)\cos\psi}{R^2}\left(1-\frac{2H_0}{R}\right)F,\qquad(13)$$

где

$$F=\ln\frac{R+H_0+r_0\left(1+\dfrac{H_0+H}{2R}\right)-(R+H)\cos\psi}{2(R+H_0)}=$$

$$=\ln\left[\frac{1}{2}+\frac{r_0}{2R}-\frac{1}{2}\cos\psi-\frac{H-H_0}{2R}\left(\cos\psi-\frac{r_0}{2R}\right)\right].$$

Разложим эту функцию в ряд Тейлора по степеням $H-H_0$, то есть примем, что

$$F=F_0+\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_0(H-H_0).$$

После некоторых преобразований находим

$$F_0=\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

и

$$\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_0=\frac{-\dfrac{1}{2R}\left(\cos\psi-\dfrac{r_0}{2R}\right)}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{r_0}{2R}-\dfrac{1}{2}\cos\psi}=\frac{1}{R}-\frac{1}{r_0}.$$

Следовательно,

$$F=\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)+\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_0}\right)(H-H_0).$$

Теперь выражение (13) можно записать так:

$$S(\rho_0,\ \psi,\ \rho)-\frac{1}{\rho_0}=\frac{S(\psi)-1}{R}\left(1-\frac{2H_0-H}{R}\right)+\frac{3\cos\psi}{R^2}(H_0-H),\qquad(14)$$

где

$$S(\psi)=\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}-6\sin\frac{\psi}{2}+1-5\cos\psi-3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right).$$

Используя формулу (14) и тот прием, который был применен при выводе формулы (10), получим

$$T_0+kT_1=\frac{1}{4\pi}\int(\mu_0+k\mu_1)\left[\frac{S(\psi)-1}{R}\left(1-\frac{2kH_0-kH}{R}\right)+\frac{3k\cos\psi}{R^2}(H_0-H)\right]d\sigma.$$

Приравнивая множители при $k$ в одинаковых степенях в обоих частях равенства, находим

$$T_0=\frac{1}{4\pi R}\int\mu_0\,[S(\psi)-1]\,d\sigma,$$

$$T_1=\frac{1}{4\pi R}\int\mu_1\,[S(\psi)-1]\,d\sigma-\frac{2H}{R}T_0+\Delta T,$$

где

$$\Delta T = \frac{1}{4\pi R^2}\int H\mu_0 [S(\psi) - 1]\, d\sigma - \frac{3}{4\pi R^2}\int H\mu_0 \cos\psi\, d\sigma + \frac{3H}{4\pi R^2}\int \mu_0 \cos\psi\, d\sigma$$

Сделаем оценку величины $\Delta T$. С этой целью выполним некоторые пр образования. Прежде всего заметим, что последний член в $\Delta T$ рав нулю, поскольку в разложении $\mu_0$ по сферическим функциям гармони первого порядка должна отсутствовать. Представляя подынтегральн выражения в остальных членах в виде разложений в ряды сферическ функций

$$H\mu_0 = \sum_{n=0}^{\infty} [H\mu_0]_n ,$$

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) ,$$

$$\cos\psi = P_1(\cos\psi) ,$$

$$1 = P_0(\cos\psi)$$

и используя свойство ортогональности

$$\int [H\mu_0]_m P_n(\cos\psi)\, d\sigma = 0, \quad (m \neq n)$$

а также теорему восстановления сферических функций

$$\int [H\mu_0]_n P_n(\cos\psi)\, d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} [H\mu_0]_n,$$

после некоторых преобразований получаем

$$\Delta T = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[H\mu_0]_n}{n-1} - \sum_{n=0}^{1} [H\mu_0]_n .$$

Так как гармоники $[H\mu_0]_n$ являются малыми величинами третьег рядка, то их производные могут достигать второго порядка ма лишь при больших значениях $n$. Следовательно, при вычислении нений отвеса $\Delta T$ не дает больших величин. Окончательная фо для возмущающего потенциала с учетом двух первых приближени нимает вид

$$T = T_0 + T_1,$$

где

$$T_0 = \frac{1}{4\pi R}\int \mu_0 [S(\psi) - 1]\, d\sigma,$$

$$T_1 = \frac{1}{4\pi R}\int \mu_1 [S(\psi) - 1]\, d\sigma - \frac{2H}{R} T_0.$$

Данная формула совпадает с формулой (11).

Итак, анализ формул Молоденского и Бровара приводит и той же зависимости между разложениями в ряд Тейлора по ням высоты рельефа Земли аномалий силы тяжести и возмущ потенциала.

Если при вычислении отклонений отвеса ограничиться дву выми приближениями, то наши преобразования позволяют у формулы, приведенные в работе [4]. В самом деле, вычисляя правую часть соотношения

$$\xi = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{dT}{\rho dB} - \frac{\partial T}{\partial H}\frac{dH}{\rho dB} - H\frac{\partial\gamma}{\rho\partial B}\right),$$

где $\xi$ — составляющая отклонения отвеса в плоскости меридиана, $\gamma$ — нормальная сила тяжести, $B$ — геодезическая широта; с помощью (11) находим с требуемой точностью

$$\xi = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{dT_{\text{г}}}{\rho dB} - H\frac{d\Delta g}{\rho dB} - H\frac{\partial\gamma}{\rho\partial B}\right).$$

Здесь первый член вычисляется по формуле Венинг-Мейнеса, причем в аномалии силы тяжести вводятся поправки за аномальную часть вертикального градиента, найденного по формуле Нумерова. Градиент аномалии силы тяжести, фигурирующий во втором члене формулы, является тем же градиентом, который находят при вычислении влияния центральной зоны на отклонение отвеса в Стоксовом приближении.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бровар В. В. О решении краевой задачи Молоденского. Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 4, 1963.

2. Марыч М. И. По поводу вычислений отклонений отвеса. Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 1. Изд-во Львовского ун-та, 1964.

3. Марыч М. И. Об определении отклонений отвеса на физической поверхности Земли. Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3. Изд-во Львовского университета, 1965.

4. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, Геодезиздат, М., 1960.

Работа поступила
23 сентября 1966 г.