МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1967 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 6

А. С. ПЕТРАШ

УРАВНИВАНИЕ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В СВЕТЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Система уравнений ошибок в линейной форме имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \cdots + t_1 u + d_1 - L_1 &= v_1, \\ a_2 x + b_2 y + \cdots + t_2 u + d_2 - L_2 &= v_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x + b_n y + \cdots + t_n u + d_n - L_n &= v_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Перепишем систему (1) в векторной форме

$$\bar{a}x+\bar{b}y+\ldots+\bar{t}u+\bar{d}-\bar{L}=\bar{v}, \tag{2}$$

где $\bar{a}, \bar{b}, \cdots, \bar{t}$ — известные линейно независимые векторы, составляющие базис линейного подпространства E^t;

$\bar{L}$ — вектор непосредственных измерений, принадлежащий линейному пространству E^n;

$\bar{d}$ — вектор приближенных значений вектора непосредственных измерений, также принадлежащий пространству E^n;

$\bar{v}$ — вектор вероятнейших ошибок.

Введем обозначения

$$-\bar{l}_0=\bar{a}x+\bar{b}y+\ldots+\bar{t}u, \tag{3}$$

$$\bar{l}=\bar{d}-\bar{L}. \tag{4}$$

Тогда (2) с учетом (3) и (4) примет вид [2].

$$\bar{l}-\bar{l}_0=\bar{v}. \tag{5}$$

Из (2) с учетом (3) напишем выражения для уравненного вектора непосредственных измерений

$$\bar{\mathbf{L}}=\bar{d}-\bar{l}_0, \tag{6}$$

$$\bar{\mathbf{L}}=\bar{L}+\bar{v}, \tag{7}$$

где $\mathbf{L}$ — уравненный вектор непосредственных измерений.

Для удобства последующих выводов перепишем (2) с учетом (4)

$$\bar{a}x+\bar{b}y+\ldots+\bar{t}u+\bar{l}=\bar{v}. \tag{8}$$

Вектор $\bar{l}_0$ есть уравненное значение вектора $\bar{l}$, содержащего ошибки непосредственных измерений. Из выражения (3) следует, что вектор l_0 принадлежит линейному подпространству E^t, так как он представлен в виде линейной комбинации базисных векторов этого подпространства. Как вытекает из [2], вектор l_0 есть проекция вектора l на подпространство E^t. Вектор $\bar{l}$ содержит ошибки непосредственных измерений и принадлежит линейному пространству E^n. Вектор $\bar{v}$ является ортогональной проекцией вектора $\bar{l}$ на ортогонально дополняющее подпространство E^{n-t} и, следовательно, принадлежит этому подпространству.

Представляется возможным определить базисные векторы подпространства E^{n-t} из условия ортогональности подпространств E^t и E^{n-t}. Пусть базис подпространства E^{n-t} составляют векторы $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_{n-t}$. Запишем условие ортогональности подпространств E^t и E^{n-t} в векторной форме.

$$
\begin{aligned}
&(\bar{a}\,\bar{s}_i) = 0,\\
&(\bar{b}\,\bar{s}_i) = 0, \quad i=1,\ 2, \ldots (n-t),\\
&\ldots\\
&(\bar{t}\,\bar{s}_i) = 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Решая $(n-t)$ систем однородных линейных уравнений, получим $(n-t)$ линейно независимых векторов, принадлежащих подпространству E^{n-t} и определяющих базис в нем. Важно отметить, что нас не устраивают нулевые решения систем (9), так как вместо искомых базисных векторов получим нулевые векторы или точку начала координат.

Векторное уравнение (8) необходимо решить, приняв вектор ошибок $\bar{v}$ минимальным. Как видно из [1], это условие будет выполняться только в том случае, если уравненный вектор $\bar{l}_0$ будет ортогональным подпространству E^{n-t}. Следовательно, вектор $\bar{l}_0$ должен быть ортогональным вектору v, который принадлежит подпространству E^{n-t}.

Поставленную задачу на уравнивание, которая заключается в отыскании уравненного вектора $\bar{L}$, можно решить двумя путями — по формулам (6) и (7). Для решения задачи по формуле (6) необходимо найти вектор $\bar{l}_0$, так как вектор $\bar{d}$ известен. В случае решения задачи по формуле (7) требуется определить вектор вероятнейших ошибок $\bar{v}$, так как измеренный вектор $\bar{L}$ известен.

Рассмотрим решение задачи по формуле (6). Решение задачи сводится к определению вектора $\bar{l}_0$. Как ясно из (3), для определения вектора $\bar{l}_0$ необходимо найти скалярные множители $x, y, \ldots u$, посредством которых вектор l_0 представлен в виде линейной комбинации векторов, составляющих базис подпространства E^t. Для нахождения скалярных множителей $x, y, \ldots, u$ умножим скалярно векторное уравнение (8) на базисные векторы $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{t}$ подпространства E^t.

$$
\begin{aligned}
&(\bar{a}\,\bar{a})\,x + (\bar{a}\,\bar{b})\,y + \ldots + (\bar{a}\,\bar{t})\,u + (\bar{a}\,\bar{l}) = (\bar{a}\,\bar{v}),\\
&(\bar{a}\,\bar{b})\,x + (\bar{b}\,\bar{b})\,y + \ldots + (\bar{b}\,\bar{t})\,u + (\bar{b}\,\bar{l}) = (\bar{b}\,\bar{v}),\\
&\ldots\\
&(\bar{a}\,\bar{t})\,x + (\bar{b}\,\bar{t}\,y + \ldots + (\bar{t}\,\bar{t})\,u + (\bar{t}\,\bar{l}) = (\bar{t}\,\bar{v}).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Но в силу ортогональности подпространств E^{n-t} и E^t, базисные векторы $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{t}$ подпространства E^t будут ортогональны вектору $\bar{v}$ из подпространства E^{n-t}. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
(\bar{a}\,\bar{v}) &= 0, \\
(\bar{b}\,\bar{v}) &= 0, \\
&\;\cdots\cdots \\
(\bar{t}\,\bar{v}) &= 0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

что соответствует лемме Гаусса.

Тогда формула (10) с учетом (11) примет вид

$$
\begin{aligned}
&(\bar{a}\,\bar{a})\,x + (\bar{a}\,\bar{b})\,y + \ldots + (\bar{a}\,\bar{t}) + (\bar{a}\,\bar{l}) = 0, \\
&(\bar{a}\,\bar{b})\,x + (\bar{b}\,\bar{b})\,y + \ldots + (\bar{b}\,\bar{t}) + (\bar{b}\,\bar{l}) = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(\bar{a}\,\bar{t})\,x + (\bar{b}\,\bar{t})\,y + \ldots + (\bar{t}\,\bar{t}) + (\bar{t}\,\bar{l}) = 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Нетрудно видеть, что выражение (12) представляет собой систему нормальных уравнений в векторной записи и при выводе нормальных уравнений не было использовано понятие квадратичной формы. Решая систему нормальных уравнений, получим значения скалярных множителей $x, y, \ldots, u$, которые подставим в уравнение (3) и определим вектор $\bar{l}_0$.

Окончательное значение уравненного вектора непосредственных измерений $\bar{\mathrm{L}}$ примет вид

$$
\bar{\mathrm{L}} = \bar{d} + \bar{a}x + \bar{b}y + \ldots + \bar{t}u. \tag{13}
$$

Для решения задачи по формуле (7) необходимо найти вектор $\bar{v}$. Как мы указали выше, вектор $\bar{v}$ есть вектор подпространства E^{n-t} и, следовательно, он может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_{n-t}$ этого подпространства. В связи с трудностью определения проекций вектора $\bar{v}$ в косоугольном базисе $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_{n-t}$, предварительно ортогонализируем базис подпространства E^{n-t} [2, 3]. Обозначим ортогональный базис подпространства E^{n-t} через $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-t}$. В ортогональном базисе вектор $\bar{v}$ можно записать в виде

$$
\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \ldots + \bar{u}_{n-t} \lambda_{n-t}, \tag{14}
$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-t}$ скалярные множители, подлежащие определению.

С другой стороны, в силу ортогональности векторов $\bar{v}$ и $\bar{l}_0$ вектор $\bar{v}$ представляет собой проекцию вектора $\bar{l}$, содержащего ошибки непосредственных измерений, на подпространство E^{n-t}. Следовательно, вектор $\bar{v}$ можно представить в виде суммы векторов, направленных по базисным векторам $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-t}$, модули которых равны проекциям вектора $\bar{l}$ на направления соответствующих базисных векторов.

$$
\bar{v} = l_{u_1} \bar{e}_{u_1} + l_{u_2} \bar{e}_{u_2} + \ldots + l_{u_{n-t}} \bar{e}_{u_{n-t}} \tag{15}
$$

где $l_{u_1}, l_{u_2}, \ldots l_{u_{n-t}}$ — величины проекций вектора $\bar{l}$ на базисные векторы подпространства E^{n-t}, Подставим значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-t}$ в формулу (14):

$$\bar{v} = \frac{(\bar{l}\,\bar{u}_1)}{(\bar{u}_1\bar{u}_1)}\bar{u}_1 + \frac{(\bar{l}\,\bar{u}_2)}{(\bar{u}_2\bar{u}_2)}\bar{u}_2 + \ldots + \frac{(\bar{l}\,\bar{u}_{n-t})}{(\bar{u}_{n-t}\bar{u}_{n-t})}\bar{u}_{n-t}. \qquad (21)$$

Окончательное значение уравненного вектора непосредственных измерений $\bar{\mathbf{L}}$ в соответствии с формулой (7) примет вид:

$$\bar{\mathbf{L}} = \bar{L} + \frac{(\bar{l}\,\bar{u}_1)}{(\bar{u}_1\bar{u}_1)}\bar{u}_1 + \frac{(\bar{l}\,\bar{u}_2)}{(\bar{u}_2\bar{u}_2)}\bar{u}_2 + \ldots + \frac{(\bar{l}\,\bar{u}_{n-t})}{(\bar{u}_{n-t}\bar{u}_{n-t})}\bar{u}_{n-t}. \qquad (22)$$

Уравнение по формуле (6) приводит к классическому уравниванию косвенных измерений. При использовании теории линейных пространств заметно упрощается вывод теории уравнивания косвенных измерений.

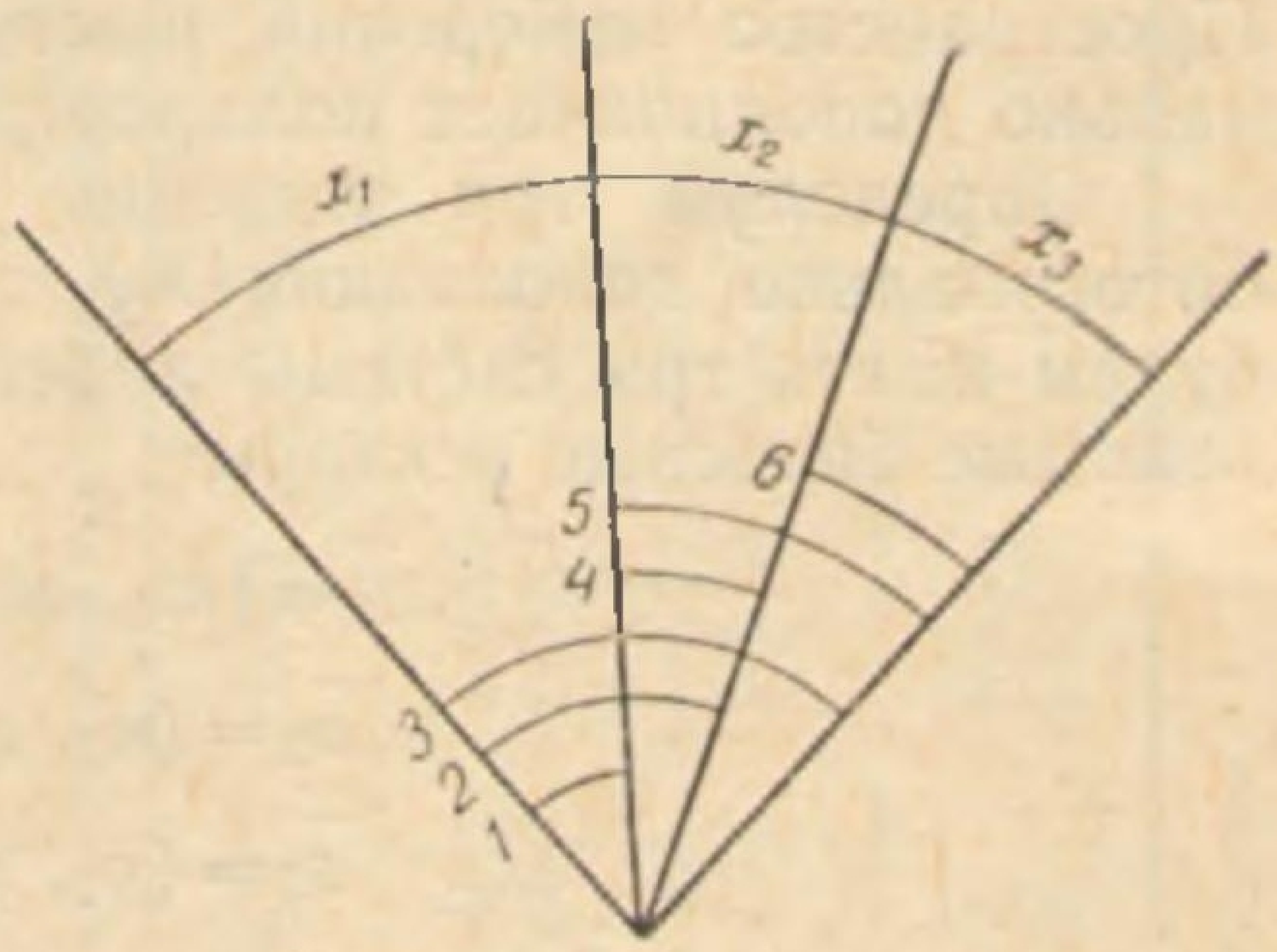
Для иллюстрации уравнивания по формуле (7) решим числовой пример.

Числовой пример *

(Уравнивание произведено по формуле (7)).

Непосредственные измерения, согласно рисунку.

1. 27°56′56″,4;
2. 70°02′48″,5;
3. 95°35′23″,2;
4. 42°05′55″,6;
5. 67°38′29″,3;
6. 25°32′34″,2.



Начальная система уравнений

$$\begin{aligned}
x_1 &= 27°56'56'',4;\\
x_1 + x_2 &= 70°02'48'',5;\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 95°35'23'',2;\\
x_2 &= 42°05'55'',6;\\
x_2 + x_3 &= 67'38°29'',3;\\
x_3 &= 25°32'34''2.
\end{aligned}$$

Введем приближенные значения углов

$$x_1' = 27°56'55'';$$

$$x_2' = 42°05'55'';$$

$$x_3' = 25°32'30''.$$

* Мазмишвили А. И., Беляев Б. И. Способ наименьших квадратов. Геодезиздат, 1959.

Уравнения ошибок примут вид:

$$\begin{aligned}
&\delta x_1 && - 1{,}4 = v_1;\\
&\delta x_1 + \delta x_2 && + 1{,}5 = v_2;\\
&\delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 && - 3{,}2 = v_3;\\
&\delta x_2 && - 0{,}6 = v_4;\\
&\delta x_2 + \delta x_3 && - 4{,}3 = v_5;\\
&\delta x_3 && - 4{,}2 = v_6.
\end{aligned}$$

Исходные векторы уравнения ошибок (2).

Таблица 1

№ сост.	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{d}$	$\overline{L}$	$\overline{l}=\overline{d}-\overline{L}$
1	+1,0	0	0	27°56′55″,0	27°56′56″,4	—1,4
2	+1,0	1,0	0	70°02′50″,0	70°02′48″,5	+1,5
3	+1,0	1,0	1,0	95°35′20″,0	95°35′23″,2	—3,2
4	0	1,0	0	42°05′55″,0	42°05′55″,6	—0,6
5	0	1,0	1,0	67°38′25″,0	67°38′29″,3	—4,3
6	0	0	1,0	25°32′30″,0	25°32′34″,2	—4,2

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ составляют базис линейного подпространства E^3. Пространство измерений шестимерное — E^6. Следовательно, ортогонально дополняющее подпространство E^{n-t} будет иметь размерность 3.

Определим три линейно независимых вектора, принадлежащих ортогонально дополняющему подпространству E^{n-t}. На основании (9) будем иметь три системы линейных однородных уравнений. Обозначим искомые базисные векторы

$$\overline{s}_1 = (m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ m_5,\ m_6);$$

$$\overline{s}_2 = (n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5,\ n_6);$$

$$\overline{s}_3 = (p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6).$$

Тогда системы уравнений (9) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
&m_1 + m_2 + m_3 = 0;\\
&m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 0;\\
&m_3 + m_5 + m_6 = 0;
\end{aligned}\right\} \quad (А)$$

$$\left.\begin{aligned}
&n_1 + n_2 + n_3 = 0;\\
&n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 0;\\
&n_3 + n_5 + n_6 = 0;
\end{aligned}\right\} \quad (Б)$$

$$\left.\begin{aligned}
&p_1 + p_2 + p_3 = 0;\\
&p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0;\\
&p_3 + p_5 + p_6 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (В)$$

Положив в системе (А) $m_2 = 1$, $m_3 = m_5 = 0$;
в системе (Б) $n_3 = 1$, $n_2 = n_6 = 0$;
в системе (В) $p_1 = 1$, $p_2 = p_5 = 0$,

найдем остальные составляющие векторов $\overline{s}_1$, $\overline{s}_2$, $\overline{s}_3$. Вычисленные значения этих векторов записаны в табл. 2.

Таблица 2

Ортогонализация векторов подпространства $E''^{\,t}$

№ сост.	$\bar s_1$	$\bar s_2$	$\bar s_3$	$\bar u_1$	$(\bar u_1 \bar s_2)$	$\alpha \bar u_1$	$\bar u_2$	$(\bar u_1 \bar s_3)$	$(\bar u_2 \bar s_3)$	$\beta_1 \bar u_1$	$\beta_2 \bar u_2$	$\bar u_3$
1	−1	−1	+1	−1	+1	−0,33	−0,67	−1,00	−0,67	+0,67	+0,33	0
2	+1	0	0	+1	0	+0,33	−0,33	0	0	−0,67	+0,17	+0,50
3	0	+1	−1	0	0	0	+1,00	0	−1,00	0	−0,50	−0,50
4	−1	0	+1	−1	0	−0,33	+0,33	−1,00	+0,33	+0,67	−0,17	+0,50
5	0	−1	0	0	0	0	−1,00	0	0	0	+0,50	−0, 0
6	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	+1,00
				$(\bar u_1 \bar u_1)$ +3,00	$(\bar u_1 \bar s_2)$ +1,00		$(\bar u_2 \bar u_2)$ +2,67	$(\bar u_1 \bar s_3)$ −2,00	$(\bar u_2 \bar s_3)$ −1,34			

$$\alpha = \frac{(\bar u_1 \bar s_2)}{(\bar u_1 \bar u_1)} = +\frac{1,00}{3,00} = +0,33; \quad \beta_1 = \frac{(\bar u_1 \bar s_3)}{(\bar u_1 \bar u_1)} = -\frac{2,00}{3,00} = -0,67; \quad \beta_2 = \frac{(\bar u_2 \bar s_3)}{(\bar u_2 \bar u_2)} = -\frac{1,34}{2,67} = -0,50.$$

Окончательные вычисления на основании формул (14), (20), (21) и (22) сведены в табл. 3.

Таблица 3

Вычисление уравненного вектора $\bar{\mathrm{L}}$

№ сост.	$\bar u_1$	$\bar u_2$	$\bar u_3$	$\bar l$	$(l\bar u_1)$	$(l\bar u_2)$	$(l\bar u_3)$	$\lambda_1 \bar u_1$	$\lambda_2 \bar u_2$	$\lambda_3 \bar u_3$	$\bar v$	v^*	(vv)	$\bar{\mathrm{L}} = \bar L + \bar v$
1	−1,0	−0,67	0	−1,4	+1,40	+0,93	0	−1,17	−0,33	0	−1,50	−1,50	2,25	27°56′54″,9
2	+1,0	−0,33	+0,5	+1,5	+1,50	−0,50	+0,75	+1,17	−0,17	0	+1,00	+1,00	1,00	70°02′49″,5
3	0	+1,00	−0,5	−3,2	0	−3,20	+1,60	0	+0,50	0	+0,50	+0,50	0,25	95°35′23″,7
4	−1,0	+0,33	+0,5	−0,6	+0,60	−0,20	−0,3	−1,17	+0,17	0	−1,00	−1,00	1,00	42°05′54″,6
5	0	−1,00	−0,5	−4,3	0	+4,30	+2,15	0	−0,50	0	−0,50	−0,50	0,25	67°38′28″,8
6	0	0	+1,0	−4,2	0	0	−1,20	0	0	0	0	0	0	25°32′34″,2
	$(\bar u_1 \bar u_1)$ +3,0	$(\bar u_2 \bar u_2)$ +2,67	$(\bar u_3 \bar u_3)$ +2,0		$(l\bar u_1)$ +3,50	$(l\bar u_2)$ +1,33	$(l\bar u_3)$ 0						$(\bar v \bar v)$ 4,75	

* Вероятнейшие ошибки, полученные при классическом уравнивании.

Ввиду трудности вычислений в косоугольном базисе, предварительно ортогонализируем базисные векторы $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$. Ортогонализация производится по формулам [1]

$$\bar{u}_1 = \bar{s}_1$$

$$\bar{u}_2 = \bar{s}_2 - \frac{(\bar{u}_1 \bar{s}_2)}{(\bar{u}_1 \bar{u}_1)} \bar{u}_1$$

$$\bar{u}_3 = \bar{s}_3 - \frac{(\bar{u}_1 \bar{s}_3)}{(\bar{u}_1 \bar{u}_1)} \bar{u}_1 - \frac{(\bar{u}_2 \bar{s}_3)}{(\bar{u}_2 \bar{u}_2)} \bar{u}_2$$

$$\lambda_1 = \frac{(\bar{l}\, \bar{u}_1)}{(\bar{u}_1 \bar{u}_1)} = \frac{+3{,}50}{3{,}00} = +1{,}17$$

$$\lambda_2 = \frac{(\bar{l}\, \bar{u}_2)}{(\bar{u}_2 \bar{u}_2)} = \frac{+1{,}33}{2{,}67} = +0{,}50$$

$$\lambda_3 = \frac{(\bar{l}\, \bar{u}_3)}{(\bar{u}_3 \bar{u}_3)} = \frac{0}{2{,}00} = 0\,.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее сообщение базируется на работе доктора технических наук, профессора А. И. Мазмишвили «Метод наименьших квадратов и задача о перпендикуляре» и является конкретной разработкой высказанных в ней идей. При решении вопроса уравнивания косвенных измерений не используется понятие квадратичной формы.

Уравнивание по формуле (7) можно считать рациональным в том случае, если размерность подпространства E^{q-t} меньше размерности подпространства E^t.

Предлагаемое изложение уравнивания косвенных измерений позволяет глубже понять геометрическую сущность уравнительных вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М.—Л., ГИТТЛ. 1951.
2. Мазмишвили А. И. Метод наименьших квадратов и задача о перпендикуляре. «Известия вузов», раздел «Геодезия и аэрофотосъемка», 1965, вып. 3.
3. Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.

Работа поступила
24 октября 1966 г.