МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1967 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 6

А. Е. ФИЛИППОВ

УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ШИРОТЫ, ДОЛГОТЫ И АЗИМУТА В СЕТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Настоящая статья представляет собой попытку составить условные уравнения, возникающие в сети пространственной триангуляции при наличии избыточных определений астрономических широт, долгот и азимутов.

Рассмотрим для примера ряд треугольников пространственной триангуляции, показанный на рис. 1. В каждом пункте этого ряда получены из измерений горизонтальные углы a и зенитные расстояния z. Последние будем считать свободными от влияния вертикальной ре-

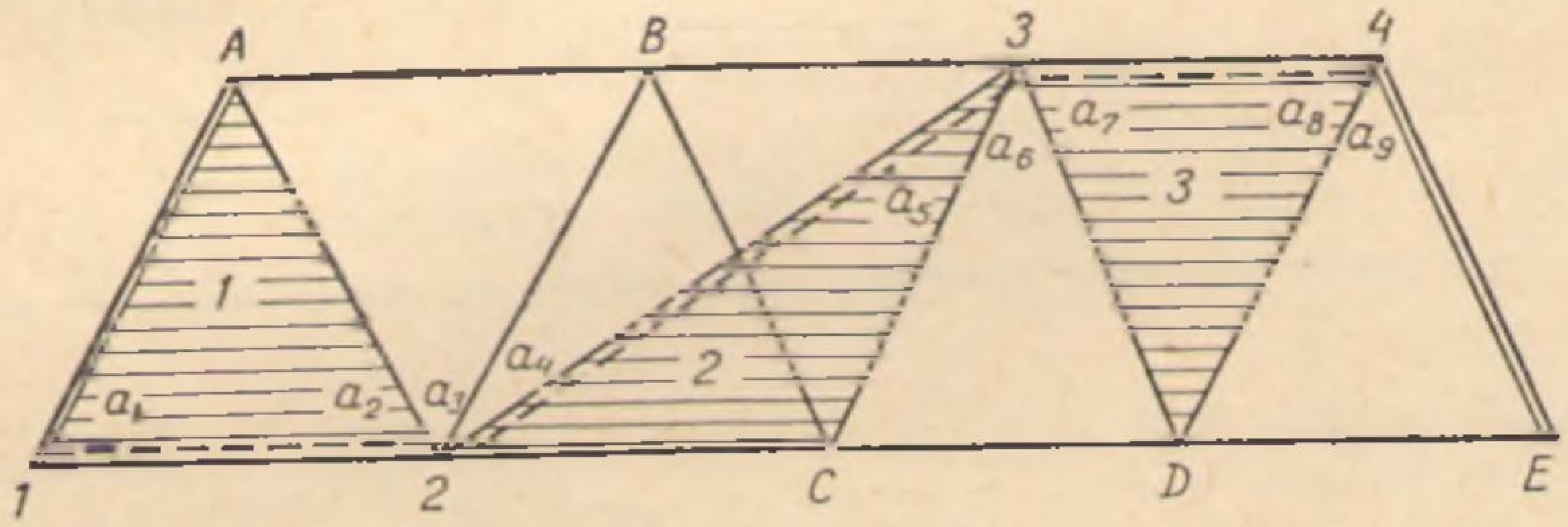

Рис. 1. Схема сети.

фракции. Ориентировка ряда относительно плоскости экватора и плоскости начального астрономического меридиана определяется значениями астрономической широты φ_1, астрономической долготы λ_1 и астрономического азимута α_{1A} направления *1A* в пункте *1*.

Указанные данные, как известно, вполне достаточны для того, чтобы получить из вычислений астрономические координаты и азимуты для любого пункта рассматриваемого ряда. Поэтому каждое дополнительное измерение широты, долготы или азимута приводит соответственно к широтному, долготному или азимутальному условным уравнениям. Пусть, например, астрономические координаты и азимут, кроме пункта *1*, измерены еще в пункте *4*. Тогда между этими пунктами возникнут все три указанные уравнения. В самом общем виде их можно записать так:

условное уравнение широты

$$d\varphi_4 - \delta\varphi_4 + (\varphi_4' - \varphi_4) = 0, \tag{1}$$

условное уравнение долготы

$$d\lambda_4 - \delta\lambda_4 + (\lambda_4' - \lambda_4) = 0, \tag{2}$$

азимутальное условное уравнение

$$d\alpha_{4E} - \delta\alpha_{4E} + (\alpha'_{4E} - \alpha_{4E}) = 0. \quad (3)$$

Здесь $\delta\varphi_4$, $\delta\lambda_4$, $\delta\alpha_{4E}$ — поправки измеренных в пункте *4* астрономических координат φ_4, λ_4 и азимута α_{4E} направления *4E*; $d\varphi_4$, $d\lambda_4$, $d\alpha_{4E}$ — поправки вычисленных для этого пункта астрономических координат и азимута, являющиеся функциями поправок измеренных элементов триангуляции, принимавших участие в передаче координат и азимута с пункта *1* на пункт *4*. Штрихами отмечены вычисленные координаты и азимут.

Для составления условных уравнений наметим ходовую линию. Целесообразно выбрать кратчайший путь для передачи координат и азимута. На рис. 1 ходовая линия отмечена штрихами. Ее вершины занумерованы порядковыми числами от *1* до *4*, а измеренные горизонтальные углы, участвующие в передаче азимута от направления на предыдущий пункт к направлению на последующий обозначены через a_1, a_2, a_3 и т. д. Треугольники, элементы которых используются при переходе от прямого азимута к обратному, а также при передаче астрономических координат, занумерованы и для наглядности покрыты штриховкой. Выбор этих треугольников в некоторых случаях может быть различным. Так, в нашем примере вместо треугольника *23C* можно взять треугольник *2B3*.

Формулы для вычисления астрономических координат и азимутов по зенитным расстояниям и горизонтальным углам в треугольниках пространственной триангуляции можно представить в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned}\cos\varphi_2\cos(\lambda_2-\lambda_1) &= \cos\varphi_1(-\cos z_{12}\cos z_{21} + \sin z_{12}\sin z_{21}\cos\gamma) + \\ &+ \sin\varphi_1\cos\alpha_{12}(\cos z_{21}\sin z_{12} + \sin z_{21}\cos z_{12}\cos\gamma) + \\ &+ \sin\varphi_1\sin\alpha_{12}\sin z_{21}\sin\gamma, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\cos\varphi_2\sin(\lambda_2-\lambda_1) &= -\sin\alpha_{12}(\cos z_{21}\sin z_{12} + \sin z_{21}\cos z_{12}\cos\gamma) + \\ &+ \cos\alpha_{12}\sin z_{21}\sin\gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\sin\varphi_2 &= \sin\varphi_1(-\cos z_{21}\cos z_{12} + \sin z_{21}\sin z_{12}\cos\gamma) - \\ &- \cos\varphi_1\cos\alpha_{12}(\cos z_{21}\sin z_{12} + \sin z_{21}\cos z_{12}\cos\gamma) - \\ &- \cos\varphi_1\sin\alpha_{12}\sin z_{21}\sin\gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\alpha_{21}[(\cos z_{12}\cos\varphi_1\cos\alpha_{12} - \sin z_{12}\sin\varphi_1)\sin\gamma - \sin\alpha_{12}\cos\varphi_1\cos\gamma] &= \\ = -(\cos z_{12}\sin\varphi_1 + \sin z_{12}\cos\varphi_1\cos\alpha_{12})\sin z_{21} &+ \\ + \sin\alpha_{12}\cos\varphi_1\cos z_{21}\sin\gamma &- \\ - (\sin z_{12}\sin\varphi_1 - \cos z_{12}\cos\varphi_1\cos\alpha_{12})\cos z_{21}\cos\gamma, & \end{aligned} \quad (7)$$

$$\gamma = \pm(K_1 - K_2), \quad (8)$$

$$\operatorname{ctg}K_1 = \frac{\operatorname{ctg}z_{13}\sin z_{12}}{\sin a_1} - \cos z_{12}\operatorname{ctg}a_1,$$

$$\operatorname{ctg}K_2 = \frac{\operatorname{ctg}z_{23}\sin z_{21}}{\sin a_2} - \cos z_{21}\operatorname{ctg}a_2. \quad (9)$$

В формулах (4)—(9) буквы a и z обозначают соответственно измеренные горизонтальные углы и зенитные расстояния. Индексы у a соответствуют обозначениям вершин треугольника (см. рис. 2). Порядок следования индексов у z определяется вершиной, где стоял угломерный инструмент, и вершиной, зенитное расстояние которой измерялось. Например, z_{13} есть зенитное расстояние точки 3 в точке 1. Верхний знак (плюс) в формуле (8) соответствует случаю, когда треугольник 123 располагается справа от направления 12, и знак минус, когда треугольник слева.

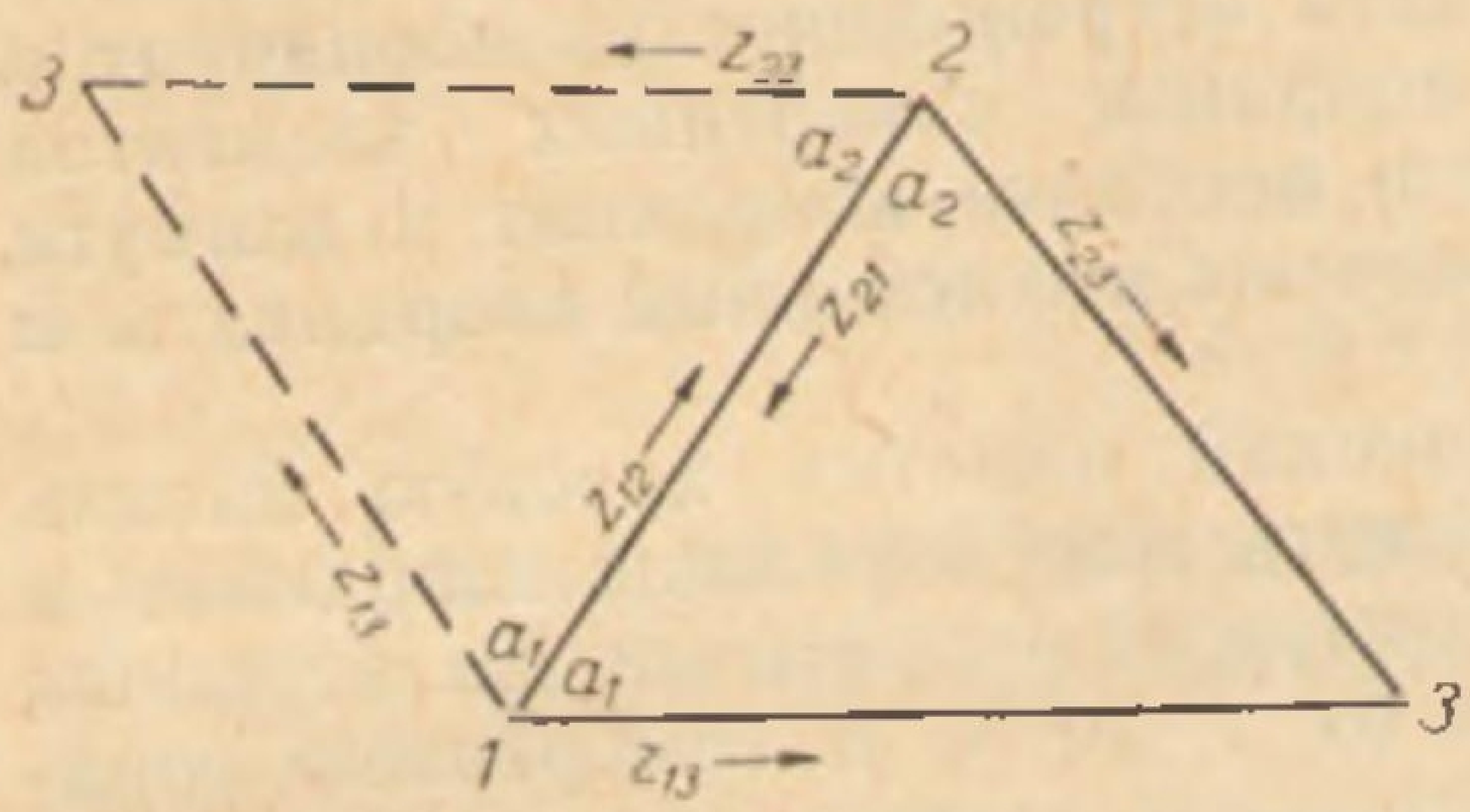

Рис. 2. Обозначения зенитных расстояний и горизонтальных углов.

γ — угол между взаимными вертикальными плоскостями в точках 1 и 2. При расстояниях порядка 20—30 *км* его величина выразится в секундах. Поэтому в большинстве практических случаев можно принять $\cos\gamma = 1$ и тогда формулы (4)—(7) заметно упростятся.

Для вычисления обратного азимута можно использовать также формулы

$$\cos\alpha_{21} = \frac{-\sin\varphi_1\cos z_{12} - \cos\varphi_1\sin z_{12}\cos\alpha_{12} - \sin\varphi_2\cos z_{21}}{\cos\varphi_2\sin z_{21}}, \qquad (10)$$

$$\sin\alpha_{21} = \frac{(\cos\varphi_1\cos z_{12} - \sin\varphi_1\sin z_{12}\cos\alpha_{12})\sin(\lambda_2-\lambda_1) - \sin\alpha_{12}\sin z_{12}\cos(\lambda_2-\lambda_1)}{\sin z_{21}}. \qquad (11)$$

Дифференцирование выражений (4), (5), (6), (10), (11) по переменным φ_1, λ_1, α_{12}, приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_2 &= p_1^{12}\,\delta\varphi_1 + p_2^{12}\,\delta\lambda_1 + p_3^{12}\,\delta\alpha_{12}, \\ \delta\lambda_2 &= q_1^{12}\,\delta\varphi_1 + q_2^{12}\,\delta\lambda_1 + q_3^{12}\,\delta\alpha_{12}, \\ \delta\alpha_{21} &= r_1^{12}\,\delta\varphi_1 + r_2^{12}\,\delta\lambda_1 + r_3^{12}\,\delta\alpha_{12}, \end{aligned} \qquad (12)$$

где

$$\begin{aligned} p_1^{12} &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_1} = \cos(\lambda_2-\lambda_1), \\ p_2^{12} &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda_1} = 0, \\ p_3^{12} &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_{12}} = -\cos\varphi_1\sin(\lambda_2-\lambda_1), \end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} q_2^{12} &= \frac{\partial\lambda_2}{\partial\varphi_1} = \operatorname{tg}\varphi_2\sin(\lambda_2-\lambda_1), \\ q_2^{12} &= \frac{\partial\lambda_2}{\partial\lambda_1} = 1, \\ q_3^{12} &= \frac{\partial\lambda_2}{\partial\alpha_{12}} = \operatorname{tg}\varphi_2\cos\varphi_1\cos(\lambda_2-\lambda_1) - \sin\varphi_1, \end{aligned} \qquad (14)$$

$$r_1^{12} = \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial \varphi_1} = \sec \varphi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$r_2^{12} = \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad (15)$$

$$r_3^{12} = \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial \alpha_{12}} = \cos \varphi_1 \sec \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Дифференциальные формулы (12)—(15) соответствуют поворотам сети пространственной триангуляции как твердого тела на малые углы $\delta\varphi_1$, $\delta\lambda_1$, $\delta\alpha_{12}$. Поэтому их можно применять не только для двух смежных пунктов *1* и *2*, но вообще, для двух любых пунктов i и j рассматриваемой сети и любых направлений is и jk. Например,

$$\delta\alpha_{jk} = r_1^{ij}\,\delta\varphi_i + r_2^{ij}\,\delta\lambda_i + r_3^{ij}\,\delta\alpha_{is},$$

где

$$r_1^{ij} = \sec \varphi_j \sin(\lambda_j - \lambda_i), \quad r_2^{ij} = 0, \quad r_3^{ij} = \cos \varphi_i \sec \varphi_j \cos(\lambda_j - \lambda_i).$$

Продифференцировав выражения (4)—(9) по переменным z_{12}, z_{21}, z_{13}, z_{23}, a_1, a_2, можно получить формулы:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial s_p}\delta s_p = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{12}}\delta z_{12} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{21}}\delta z_{21} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{13}}\delta z_{13} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{23}}\delta z_{23} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_2}\delta a_2,$$

$$\delta\lambda_2 = \frac{\partial\lambda_2}{\partial s_p}\delta s_p = \frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{12}}\delta z_{12} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{21}}\delta z_{21} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{13}}\delta z_{13} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{23}}\delta z_{23} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\lambda_2}{\partial a_2}\delta a_2, \qquad (16)$$

$$\delta\alpha_{21} = \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial s_p}\delta s_p = \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{12}}\delta z_{12} + \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{21}}\delta z_{21} + \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{13}}\delta z_{13} + \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{23}}\delta z_{23} + \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial a_2}\delta a_2,$$

где

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{12}} = -\cos\alpha_{21} \mp Aa', \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{23}} = \mp Ab'',$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{21}} = -\cos\alpha_{21} \pm Aa'', \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_1} = \pm Ac', \qquad (17)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{13}} = \pm Ab', \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_2} = \mp Ac'',$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{12}} = -\sin\alpha_{21}\sec\varphi_2 \pm Ba', \quad \frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{23}} = \pm Bb'',$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{21}} = -\sin\alpha_{21}\sec\varphi_2 \mp Ba'', \quad \frac{\partial\lambda_2}{\partial a_1} = \mp Bc', \qquad (18)$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{13}} = \mp Bb', \quad \frac{\partial\lambda_2}{\partial a_2} = \pm Bc'',$$

$$\frac{\partial \alpha_{21}}{\partial z_{12}} = -\sin \alpha_{21} \operatorname{tg} \varphi_2 \pm Ca', \quad \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial z_{23}} = \pm Cb'',$$

$$\frac{\partial \alpha_{21}}{\partial z_{21}} = -\sin \alpha_{21} \operatorname{tg} \varphi_2 \mp Ca'', \quad \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial a_1} = \mp Cc', \tag{19}$$

$$\frac{\partial \alpha_{21}}{\partial z_{13}} = \mp Cb', \qquad \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial a_2} = \pm Cc'',$$

$$A = \sin z_{21} \sin \alpha_{21}, \quad B = \sin z_{21} \cos \alpha_{21} \sec \varphi_2,$$

$$C = \sin z_{21} \cos \alpha_{21} \operatorname{tg} \varphi_2 - \cos z_{21}$$

$$a' = \sin K_1 \operatorname{ctg} A_1, \quad b' = \frac{\sin C_1}{\sin A_1}, \quad c' = \frac{\sin K_1 \cos C_1}{\sin a_1},$$

$$a'' = \sin K_2 \operatorname{ctg} A_2, \quad b'' = \frac{\sin C_2}{\sin A_2}, \quad c'' = \frac{\sin K_2 \cos C_2}{\sin a_2}, \tag{20}$$

$$\cos A_1 = \cos z_{12} \cos z_{13} + \sin z_{12} \sin z_{13} \cos a_1,$$

$$\cos A_2 = \cos z_{21} \cos z_{23} + \sin z_{21} \sin z_{23} \cos a_2,$$

$$\cos C_1 = \cos a_1 \cos K_1 - \sin a_1 \sin K_1 \cos z_{12},$$

$$\cos C_2 = \cos a_2 \cos K_2 - \sin a_2 \sin K_2 \cos z_{21}.$$

Погрешность формул (17)—(19) в широтах, не близких к 90°, порядка $\gamma \delta s_p$, где δs_p — поправка какого-либо измеренного элемента триангуляции. Верхний знак следует брать, когда треугольник располагается справа от стороны ходовой линии, нижний — в противоположном случае. Первая или вторая четверти, в которых находятся углы C_1 или C_2, устанавливаются по знаку косинуса.

С помощью формул (4)—(11) последовательно по сторонам ходовой линии передаем астрономические координаты и азимут с пункта *1* на пункт *4*. При этом используем измеренные элементы заштрихованных треугольников. Сопоставив вычисленные для пункта *4* значения этих величин с известными, получим свободные члены уравнений (1)—(3). Для выражения величин $d\varphi_4$, $d\lambda_4$, $d\alpha_{4E}$ как функций поправок измеренных горизонтальных углов и зенитных расстояний используем дифференциальные формулы (12)—(15) и (16)—(20).

Найдем величину $d\varphi_4$. Учитывая сказанное выше относительно формул (12)—(15) и обращаясь к рис. 1, напишем

$$d\varphi_4 = p_1^{14} \delta\varphi_1 + p_1^{24} \Delta\varphi_2 + p_1^{34} \Delta\varphi_3 + p_1^{44} \Delta\varphi_4 +$$

$$+ p_3^{14} \Delta\alpha_{12} + p_3^{24} \Delta\alpha_{23} + p_3^{34} \Delta\alpha_{34},$$

где

$$\Delta\alpha_{12} = \delta\alpha_{1A} + \delta a_1,$$

$$\Delta\alpha_{23} = \left(\frac{\partial \alpha_{21}}{\partial s_p} \delta s_p\right)_1 + \delta a_2 + \delta a_3 + \delta a_4,$$

$$\Delta\alpha_{34} = \left(\frac{\partial \alpha_{32}}{\partial s_p} \delta s_p\right)_2 - \delta a_5 - \delta a_6 - \delta a_7,$$

$$\Delta\varphi_2 = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial s_p} \delta s_p\right)_1,$$

$$\Delta\varphi_3 = \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial s_p} \delta s_p\right)_2,$$

$$\Delta\varphi_4 = \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial s_p} \delta s_p\right)_3.$$

Символы $\left(\frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial s_p}\delta s_p\right)_i$, $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial s_p}\delta s_p\right)_i$ означают суммы произведений частных производных от рассматриваемых функций (α, φ) по переменным $s_p = z_{ij}, z_{ji}, z_{ik}, z_{jk}, a_i, a_j$ на соответствующие поправки этих переменных $\delta s_p = \delta z_{ij}, \delta z_{ji}, \delta z_{ik}, \delta z_{jk}, \delta a_i, \delta a_j$. Эти суммы вычисляются по формулам (16)—(20). Индекс $i = 1, 2, 3, \ldots$ у скобок указывает номер треугольника, по элементам которого выполняются вычисления. Величины p с соответствующими индексами определяются формулами (13) ($p_1^{44} = 1$).

Таким образом, условное уравнение широты в несколько более развернутом виде запишется так:

$$p_1^{14}\delta\varphi_1 + p_1^{24}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial s_p}\delta s_p\right)_1 + p_1^{34}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial s_p}\delta s_p\right)_2 + \left(\frac{\partial\varphi_4}{\partial s_p}\delta s_p\right)_3 +$$
$$+ p_3^{14}(\delta\alpha_{1A} + \delta a_1) + p_3^{24}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial s_p}\delta s_p\right) + \delta a_2 + \delta a_3 + \delta a_4\right] +$$
$$+ p_3^{34}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{32}}{\partial s_p}\delta s_p\right)_2 - \delta a_5 - \delta a_6 - \delta a_7\right] - \delta\varphi_4 + (\varphi_4' - \varphi_4) = 0. \qquad (21)$$

Аналогичным образом получаются остальные два уравнения. Условное уравнение долготы:

$$q_1^{14}\delta\varphi_1 + q_1^{24}\Delta\varphi_2 + q_1^{34}\Delta\varphi_3 + q_2^{14}\delta\lambda_1 + q_2^{24}\Delta\lambda_2 + q_2^{34}\Delta\lambda_3 + q_2^{44}\Delta\lambda_4 +$$
$$+ q_3^{14}\Delta\alpha_{12} + q_3^{24}\Delta\alpha_{23} + q_3^{34}\Delta\alpha_{34} - \delta\lambda_4 + (\lambda_4' - \lambda_4) = 0$$

или

$$q_1^{14}\delta\varphi_1 + q_1^{24}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial s_p}\delta s_p\right)_1 + q_1^{34}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial s_p}\delta s_p\right)_2 +$$
$$+ \delta\lambda_1 + \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial s_p}\delta s_p\right)_1 + \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial s_p}\delta s_p\right)_2 + \left(\frac{\partial\lambda_4}{\partial s_p}\delta s_p\right)_3 +$$
$$+ q_3^{14}(\delta\alpha_{1A} + \delta a_1) + q_3^{24}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial s_p}\delta s_p\right)_1 + \delta a_2 + \delta a_3 + \delta a_4\right] +$$
$$+ q_3^{24}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{32}}{\partial s_p}\delta s_p\right)_2 - \delta a_5 - \delta a_6 - \delta a_7\right] - \delta\lambda_4 + (\lambda_4' - \lambda_4) = 0. \qquad (22)$$

Азимутальное условное уравнение:

$$r_1^{14}\delta\varphi_1 + r_1^{24}\Delta\varphi_2 + r_1^{34}\Delta\varphi_3 + r_3^{14}\Delta\alpha_{12} + r_3^{24}\Delta\alpha_{23} + r_3^{34}\Delta\alpha_{34} +$$
$$+ r_3^{44}\Delta\alpha_{4E} - \delta\alpha_{4E} + (\alpha_{4E}' - \alpha_{4E}) = 0$$

или

$$r_1^{14}\delta\varphi_1 + r_1^{24}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial s_p}\delta s_p\right)_1 + r_1^{34}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial s_p}\delta s_p\right)_2 +$$
$$+ r_3^{14}(\delta\alpha_{1A} + \delta a_1) + r_3^{24}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial s_p}\delta s_p\right)_1 + \delta a_2 + \delta a_3 + \delta a_4\right] +$$
$$+ r_3^{34}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{32}}{\partial s_p}\delta s_p\right)_2 - \delta a_5 - \delta a_6 - \delta a_7\right] + \left[\left(\frac{\partial\alpha_{43}}{\partial s_p}\delta s_p\right)_3 - \delta a_8 - \delta a_9\right] -$$
$$- \delta\alpha_{4E} + (\alpha_{4E}' - \alpha_{4E}) = 0. \qquad (23)$$

Если на пункте *4* измерялась только широта φ_4 или только долгота λ_4, или же только азимут α_{4E}, то в уравнении (21) необходимо принять $\delta\alpha_{1A}=0$, в уравнении (22) $\delta\varphi_1$, $\delta\alpha_{1A}=0$ и в уравнении (23) $\delta\varphi_1=0$. Если измерения астрономических координат и азимутов считать безошибочными, то во всех уравнениях $\delta\varphi_1$, $\delta\alpha_{1A}$, $\delta\lambda_1$, $\delta\varphi_4$, $\delta\lambda_4$, $\delta\alpha_{4E}=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудский В. И. Некоторое обобшение формул передачи астрономических координат и азимута. Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. IV, Изд-во Львовского ун-та, 1966.

Работа поступила
9 ноября 1966 г.