МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1965 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 3

Н. К. МИГАЛЬ

НЕСКОЛЬКО СЛОВ ОБ ОСНОВНЫХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Начиная с конца тридцатых годов, все чаще появляются работы, в которых вместо геоида изучается топографическая поверхность Земли. Такие научные поиски обусловлены давно известным фактом невозможности определения геоида по измеренным элементам внешнего гравитационного поля. Несмотря на этот недостаток, геоид все же сыграл исключительно важную роль в науке, так как с помощью его мы имеем ясное представление о рельефе Земли, которое сложилось еще в древности. Объясняется это тем, что, пользуясь понятием о геоиде, можно изучать рельеф Земли, не имея определенного представления о фигуре геоида. Именно в этом заключается ценность понятия о геоиде. Возникает вопрос, нельзя ли заменить геоид другой, близкой к нему поверхностью, которая сохраняла бы названное качество геоида и на которую можно было бы сравнительно просто редуцировать измеренные элементы гравитационного поля на физической поверхности Земли.

М. С. Молоденский, отрицая какую бы то ни было ценность геоида, впервые вместо него ввел понятие о квазигеоиде, которое нашло довольно широкое распространение. Квазигеоид в отличие от геоида связан с теоретической моделью Земли, являющейся условным построением. Поэтому квазигеоид и сами высоты точек (нормальные высоты) находятся в функциональной зависимости от параметров нормального гравитационного поля, которые являются условными. В силу этого квазигеоид Молоденского лишен того ценного свойства, которым обладает геоид. Замечательным, однако, в теории Молоденского является то, что в ней не требуется редуцирование измеренных элементов гравитационного поля к поверхности квазигеоида. Но, к сожалению, приходится отметить, что на протяжении двадцати лет с момента опубликования теории Молоденского нет заметного сдвига в решении проблемы определения возмущающего потенциала на физической поверхности Земли, без чего основная идея М. С. Молоденского не может быть реализована на практике *. К тому же неясно, является ли этот путь решения проблем теории фигуры Земли правильным или наиболее простым. Все эти вопросы ожидают своего решения. Ясно лишь одно, что наряду с разработкой теории Молоденского заслуживают самого пристального

* Если учесть, что проблема определения возмущающего потенциала на физической поверхности Земли была поставлена и делались попытки решить ее еще до появления теории М. С. Молоденского [1], то время, затраченное на его решение, увеличится.

внимания любые другие предложения по проблемам теории фигуры Земли. Одно из таких предложений мы излагаем ниже.

Поверхность, заменяющую геоид, определим, исходя из следующих соображений.

В точке A физической поверхности Земли имеет место разложение потенциала силы тяжести W в ряд Тейлора по направлению L

$$W' = W + \frac{dW}{dL} dL + \frac{d^2 W}{dL^2} \frac{L^2}{2} + \cdots \tag{1}$$

Это разложение не вызывает сомнения, если L направлено во внешнее пространство; если же L направлено во внутрь притягивающих масс, то его следует понимать как аналитическое продолжение внешнего потенциала, осуществляемое с помощью ряда Тейлора. Кстати сказать, таким же аналитическим продолжением пользуются в теории Стокса и Молоденского при переходе от граничного условия, составленного на определяемой поверхности, к граничному условию на известной близкой к ней поверхности.

Возьмем в качестве направления L направление, совпадающее с линией отвеса в точке A. В этом случае

$$\frac{dW}{dL} = g, \quad \frac{d^2 W}{dL^2} = \frac{dg}{dn}.$$

Кроме того, потребуем, чтобы $W' = W_0$, где W_0 — потенциал силы тяжести на уровне моря. Получим

$$W_0 = W + gH + \frac{1}{2} \frac{dg}{dn} H^2 + \cdots$$

Или

$$\frac{W_0 - W}{g} = H + \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{dg}{dn} H^2. \tag{2}$$

Если определить отрезок H по формуле (2) и отложить его от точки A вдоль направления линии отвеса, то другой конец его отметит точку. Геометрическое место таких точек даст нам поверхность, которую мы предлагаем принять вместо геоида. На этой поверхности аналитически продолженный потенциал внешнего гравитационного поля принимает постоянное значение, равное W_0. Поэтому нашу поверхность можно рассматривать как внешнюю уровенную поверхность планеты, которая создает гравитационное поле, совпадающее с реальным гравитационным полем вне Земли. Теория определения такой уровенной поверхности хорошо разработана и не вызывает сомнений. Но при этом возникают такие вопросы, как определение высот, приведение к уровенной поверхности астрономических широт и долгот, а также силы тяжести. Рассмотрим их.

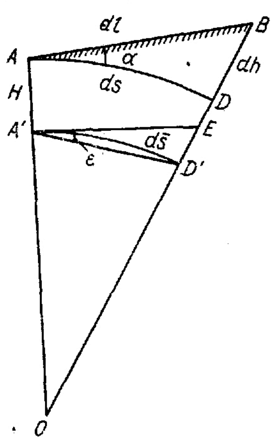

Рис. 1.

Определим dH при переходе из точки A в близкую соседнюю точку B физической поверхности Земли. С этой целью обратимся к рисунку.

В плоскости произвольного нормального сечения в точке A на нем нанесены: ds — элемент дуги нормального сечения уровенной поверхности, проходящей через точку A; O — центр кривизны нормального сечения; dl — элемент кривой физической поверхности Земли; α — угол наклона элемента dl; dh — измеренное превышение точки B над точкой A (Направление линии отвеса в точке B, вдоль которой определяется нивелирное превышение, в общем случае не совпадает с линией, соединяющей точку A с точкой O, на которой показано dh. Можно установить, что возникающая при этом ошибка исчезающе мала.).

Рассматривая левую часть равенства (2) как функцию от l, находим такую дифференциальную формулу

$$-\frac{1}{g}\frac{dW}{dl}dl-\frac{W_0-W}{g}\frac{1}{g}\frac{dg}{dl}dl=\left(1+\frac{1}{g}\frac{dg}{dn}H\right)dH .$$

Но

$$\frac{dW}{dl}=-g\sin\alpha,$$

$$dh=dl\sin\alpha,$$

$$\frac{dg}{dl}dl=\frac{dg}{ds}ds-\frac{dg}{dh}dh,$$

$$\frac{W_0-W}{g}\approx H.$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{g}\frac{dg}{dn}H\right)dH=\left(1+\frac{1}{g}\frac{dg}{dn}H\right)dh-\frac{1}{g}\frac{dg}{ds}Hds.$$

Отсюда получаем окончательную формулу для определения высот

$$dH=dh-\frac{1}{g}\frac{dg}{ds}hds. \qquad (3)$$

Здесь при выводе отброшены члены, содержащие H^2, и в окончательном результате H заменено на измеренную высоту h.

Теперь определим составляющую отклонения отвеса в плоскости нормального сечения, причем в данном случае под отклонением отвеса подразумевается угол между линией отвеса в точке A и нормалью к уровенной поверхности, принятой нами вместо геоида.

Обратимся снова к рисунку. На нем $AA'=H$; $ds \parallel \overline{ds}$; $A'E$ — дуга нашей уровенной поверхности; ε — искомое отклонение отвеса.

Согласно (3), имеем

$$D'E=\frac{1}{g}\frac{dg}{ds}hds.$$

Следовательно,

$$\varepsilon=\frac{1}{g}\frac{dg}{ds}h. \qquad (4)$$

Полученная формула служит для приведения измеренных астрономических широт и долгот к рассматриваемой уровенной поверхности.

В горном районе ε может достигнуть весьма заметной величины, так как в (4) входит горизонтальный градиент силы тяжести. Но это никого не должно смущать, ибо отмеченное явление соответствует действительности и связано с тем, что кривизна силовой линии, за которой следует направление линии отвеса, пропорциональна горизонтальному градиенту силы тяжести.

Осталось еще найти формулу для редуцирования измеренной силы тяжести.

Представим силу тяжести на нашей уровенной поверхности в таком виде

$$g+\frac{dg}{dn}H.$$

Второй член, являющийся нужной поправкой к силе тяжести, согласно (2), имеет вид

$$\frac{dg}{dn}H=\frac{2g}{H}\left(\frac{W_0-W}{g}-H\right). \tag{5}$$

Формула (5) решает вопрос, так как в правой ее части все величины получены из измерений. Однако ее следует несколько преобразовать.

Мы имеем

$$\frac{W_0-W}{g}-H=\frac{1}{g}\int\limits_O^A(g'-g)\,dh+\int\limits_O^A\frac{1}{g'}\,\frac{dg'}{ds}\,h'ds.$$

Величины, отмеченные штрихами, относятся к текущей точке, а интегралы берутся вдоль ходовой линии нивелировки от начальной точки O на уровне моря до точки A физической поверхности Земли.

Пусть

$$g'+kh'=g_0',$$
$$g+kh=g_0,$$

где kh — обычная поправка за высоту точки наблюдения, причем коэффициент k может принимать любое подходящее значение. Таким образом,

$$\frac{1}{g}\int\limits_O^A(g'-g)\,dh=\frac{1}{g}\int\limits_O^A(g_0'-g_0)\,dh+\frac{k}{2g}h^2.$$

Теперь формулу (5) напишем в следующем виде:

$$\frac{dg}{dh}H=kh+\frac{2}{H}\int\limits_O^A(g_0'-g_0)\,dh+\frac{2g}{H}\int\limits_O^A\frac{1}{g'}\,\frac{dg'}{ds}\,h'ds. \tag{6}$$

В заключение отметим, что внесенное здесь предложение подлежит дальнейшему изучению и проверке на практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Мигаль. Обоснование формулы Стокса для нерегуляризированной Земли. Бюллетень научных работ Харьковского инженерно-строительного института, № 17, 1939.

Работа поступила
2 марта 1965 г.