

А. Л. ОСТРОВСКИЙ

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ УЧЕТА ВЛИЯНИЯ АТМОСФЕРЫ НА РЕЗУЛЬТАТЫ СВЕТОДАЛЬНОМЕРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Скорость света в атмосфере c определится из выражения

$$c = \frac{c_0}{\bar{n}}, \quad (1)$$

где c_0 — скорость распространения электромагнитных колебаний в вакууме; \bar{n} — групповой среднеинтегральный показатель преломления воздуха на пути светового луча от приемо-передатчика до отражателя и обратно.

При светодальномерных измерениях по метеорологическим элементам — температуре — T , давлению — B и влажности — e , наблюдаемым вблизи приемо-передатчика и отражателя, определяют соответственно показатели преломления воздуха n_1 и n_2 , находят $\bar{n} = \frac{n_1 + n_2}{2}$

и полагают, что $\bar{n} = n$. На самом деле $\bar{n} \neq n$, причем равенство нарушается тем более, чем значительно отличается средний уровень светового луча относительно подстилающей поверхности от среднего уровня, на котором велись определения n_1 и n_2 . В результате реальная (рабочая) скорость света c определяется неверно, что вызывает ошибки в измеряемых расстояниях.

С другой стороны, световые волны распространяются по принципу Ферма — оптически кратчайшим путем и следуют не по прямолинейной, а по некоторой пространственной траектории. Это в свою очередь вносит систематическую ошибку в результаты измерений, так как интересующая нас замыкающая световой кривой короче длины самой кривой — S , причем эта ошибка — ΔS достаточно точно может быть определена из выражения:

$$\Delta S = - \frac{S^3}{24 R_c^2}, \quad (2)$$

где R_c — радиус световой кривой, основная кривизна которой расположена в вертикальной плоскости. С этой погрешностью при рядовых светодальномерных измерениях вообще не считаются, тем не менее ее следует учитывать при высокоточных измерениях.

Важность точного учета действия атмосферы на результаты светодальномерных измерений отмечалась неоднократно. Этот вопрос важен не только для практики, но и для теории и, прежде всего, для уточнения важнейшей константы физики — скорости света в вакууме по ре-

зультатам измерений на геодезических базисах. Обе вышеуказанные погрешности могут быть учтены путем измерения метеорологических элементов в ряде точек на всем пути светового луча. Однако такой, метеорологический, метод сопряжен с рядом трудностей и, главным образом, с необходимостью подъема метеорологических приборов на высоту светового луча, часто весьма значительную.

В настоящей статье предлагается определять \bar{n} и R_c геодезическими методами, т. е. на основании одновременного со светодальномерными измерениями геодезического нивелирования, двухстороннего или

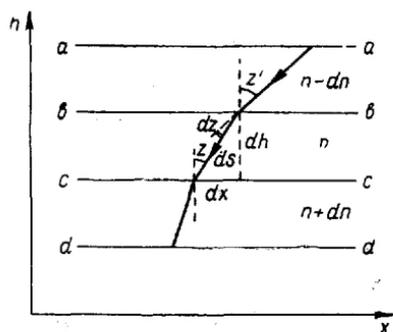


Рис. 1. Изменение зенитного расстояния z на отрезке пути луча ds .

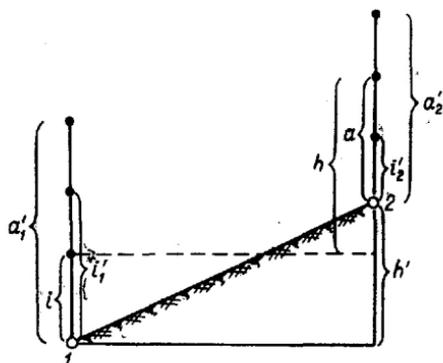


Рис. 2. Расположение дальномера, отражателя и теодолитов на пунктах 1 и 2.

одностороннего, в зависимости от необходимой точности определения \bar{n} , R_c и наличия отметок пунктов из геометрического нивелирования. Строго говоря, такой метод не «чисто» геодезический, а комбинированный, требующий комплекса геодезических и метеорологических наблюдений. Однако геодезическим измерениям здесь принадлежит ведущая роль, а R_c определяется и без метеорологических наблюдений. Разумеется, прибегая к такому методу, мы пренебрегаем разностью в спектральном составе света, пропускаемого модуляторами дальномеров и воспринимаемого глазом наблюдателя, ведущего измерения зенитных расстояний.

Рассмотрим теорию и опишем экспериментальную проверку методов. Пусть слои воздуха с коэффициентами преломления $(n - dn)$, n , $(n + dn)$ разграничены линиями aa , bb , cc , dd , параллельными оси x (рис. 1). Для элемента световой кривой — dS с зенитным расстоянием z запишем условие оптического инварианта

$$n \cdot \sin z = \text{const.} \quad (3)$$

Продифференцировав выражение (3), найдем изменение направления визирного луча — dz при переходе со среды с показателем преломления $(n - dn)$ в среду с показателем n :

$$dz = -\frac{dn}{n} \text{tg } z. \quad (4)$$

Кривизна световой кривой определится из выражения

$$\frac{1}{R_c} = \frac{dz}{dS}. \quad (5)$$

Так как непосредственно из чертежа $\frac{dh}{dS} = \cos z$, то с учетом (4) формула (5) примет вид:

$$\frac{1}{R_c} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dh} \cdot \sin z. \quad (6)$$

Как известно,

$$R_c = \frac{R_3}{k}, \quad (7)$$

где R_3 — радиус Земли, k — коэффициент рефракции. Решая (6) относительно вертикального градиента коэффициента преломления $\frac{dn}{dh}$ с учетом (7), имеем:

$$\frac{dn}{dh} = -\frac{k}{R_3} \cdot n \operatorname{cosec} z. \quad (8)$$

В интегральном виде с заданными пределами

$$\int_n^{n_i} dn = -\int_h^{h_i} \frac{k}{R_3} \cdot n \operatorname{cosec} z dh. \quad (9)$$

Пренебрегая незначительными изменениями z на пути луча и полагая $h=0$, после интегрирования получим:

$$n_i = n \left(1 - \frac{k}{R_3} \operatorname{cosec} z h_i \right). \quad (10)$$

Формула (10) позволяет определять n_i на некоторой высоте h_i по известному коэффициенту рефракции k , измеренному зенитному расстоянию z и коэффициенту преломления на начальном уровне h ; h_i следует рассматривать как превышение между приемо-передатчиком и отражателем, установленными на концах измеряемой линии.

Среднеинтегральное значение \bar{n} на пути луча получим из выражения:

$$\bar{n} = \frac{1}{S} \int_0^S n_i dS_i, \quad (11)$$

или

$$\bar{n} = \frac{1}{S} \int_0^S \left[n \left(1 - \frac{k}{R_3} \operatorname{cosec} z h_i \right) \right] ds. \quad (12)$$

Формулы (7), (2) и (12) решают задачу по определению R_c , ΔS и \bar{n} в общем виде.

При определении \bar{n} возможны три случая:

1) Превышение h' между центрами геодезических пунктов 1 и 2 известно из геометрического нивелирования, и одновременно со светодальномерными измерениями велось двухстороннее геодезическое нивелирование.

В соответствии с рис. 2 имеем:

$$h = h' + a - i \quad (13)$$

и, как известно,

$$h' = S_0 \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2} + S_0 \frac{k_2 - k_1}{4R_3} + \frac{a'_1 + i'_1}{2} - \frac{a'_2 + i'_2}{2}. \quad (14)$$

В этих формулах S_0 — горизонтальное расстояние между пунктами 1 и 2; h — превышение между приемо-передатчиком и отражателем; i — высота приемо-передатчика над пунктом 1; a — высота отражателя над пунктом 2; i'_1 и i'_2 — высоты теодолитов соответственно над пунктами 1 и 2; a'_1 и a'_2 — высоты визирных целей над этими же пунктами; z_1 и z_2 — зенитные расстояния; k_1 и k_2 — коэффициенты рефракции, определенные на пунктах 1 и 2. На основании формул (13) и (14) имеем:

$$h = S_0 \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2} + S_0^2 \frac{k_2 - k_1}{4R_3} + \frac{a' + i'_1}{2} - \frac{a'_2 + i'_2}{2} + a - i. \quad (14')$$

При измерении зенитных расстояний за визирные цели можно использовать посылающие световые потоки точки приемо-передатчика и отражателя, так что $i = a'$ и $a = a'_2$. Кроме того, теодолиты следует устанавливать на высотах приемо-передатчика и отражателя, тогда $i = i'_2$ и $a = i'_1$. Заметим, что путь решения задачи не осложняется и без наложения этих условий. При таком расположении инструментов формула (14') примет вид:

$$h = S_0 \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2} + S_0^2 \frac{k_2 - k_1}{4R_3}. \quad (15)$$

Заменяя в формуле (12) n и z величинами n_1 и z_1 , полученными на пункте 1, полагая $k = \frac{k_1 + k_2}{2} = k_c$ и подставляя вместо h , превышение h , найденное из (15), имеем:

$$\bar{n} = \frac{1}{S} \int n_1 \left[1 - \frac{k_c}{R_3} \operatorname{cosec} z_1 \left(S_0 \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2} + S_0^2 \frac{k_2 - k_1}{4R_3} \right) \right] dS. \quad (16)$$

После интегрирования, полагая $\operatorname{cosec} z = 1$, т. е. $S = S_0$

$$\bar{n} = n_1 \left[1 - \frac{k_c}{2R_3} \left(S \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2} + S^2 \frac{k_2 - k_1}{6R_3} \right) \right]. \quad (17)$$

На основании (15)

$$h - S \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2} = S^2 \frac{k_2 - k_1}{4R_3} = f, \quad (18)$$

где f — поправка превышения за кривизну земли и рефракцию. С новым обозначением:

$$h - f = S \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2}. \quad (19)$$

Теперь (17) с учетом (18) и (19) после несложных преобразований примет окончательный вид:

$$\bar{n} = n_1 \left[1 - \frac{k_c}{2R_3} \left(h - \frac{1}{3} f \right) \right]. \quad (20)$$

Следует заметить, что, так как h' известно из геометрического нивелирования, то h может быть определено из выражения (13).

2) h' неизвестно, и велось одновременное двухстороннее геодезическое нивелирование.

Тогда, как и ранее,

$$h = h' + a - i. \quad (13)$$

В этом случае h' определится из известного выражения

$$h' = S \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2} + \frac{a'_1 + i'_1}{2} - \frac{a'_2 + i'_2}{2}. \quad (21)$$

При вышеупомянутом расположении инструментов для h получим формулу

$$h = S \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2}. \quad (22)$$

Подставляя значение h из (22) в (12), имеем:

$$\bar{n} = \frac{1}{S} \int_0^S \left[n_1 \left(1 - \frac{k}{R_3} \cdot S \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2} \right) \right] dS. \quad (23)$$

После интегрирования

$$\bar{n} = n_1 \left(1 - \frac{k}{2R_3} \cdot h \right). \quad (24)$$

Напомним, что в этом случае при определении коэффициента рефракции k делается предположение о равенстве k_1 и k_2 ; тем не менее k в формуле (24) будет равно k_0 , поэтому формула (24) мало уступает по точности формуле (20).

3) h' известно из геометрического нивелирования и одновременно со светодальномерными измерениями велось одностороннее геодезическое нивелирование на пункте 1. Тогда снова:

$$h = h' + a - i, \quad (13)$$

причем

$$h' = S \operatorname{ctg} z_1 + S^2 \frac{1 - k_1}{2R_3} + i'_1 - a'_2. \quad (25)$$

При условии $i = i'_1$ и $a = a'_2$ с учетом (25) формула (13) примет вид:

$$h = S \operatorname{ctg} z_1 + S^2 \frac{1 - k_1}{2R_3}. \quad (26)$$

Аналогично для \bar{n} получим выражение:

$$\bar{n} = \frac{1}{S} \int_0^S n_1 \left[1 - \frac{k_1}{R_3} \left(S \operatorname{ctg} z_1 + S^2 \frac{1 - k_1}{2R_3} \right) \right] dS. \quad (27)$$

После интегрирования и некоторых преобразований имеем окончательно:

$$\bar{n} = n_1 \left[1 - \frac{k}{2R_3} \left(h - \frac{1}{3} f \right) \right]. \quad (28)$$

В этом случае

$$f = S^2 \frac{1 - k_1}{2R_3}, \quad (29)$$

а h может быть определено из выражения (13).

Этот (третий) случай ранее рассмотрен в работе [2]. Однако в этой работе при выводе формул ошибочно не учтено, что для определения n нас интересуют превышения между приемо-передатчиком и отражателем, а не между центрами геодезических пунктов. Формулы (20), (24) и (28) являются рабочими и решают задачу определения n во всех возможных случаях при небольших углах наклона.

Для экспериментальной проверки геодезических методов определения n нами в южном степном районе СССР между пунктами триангуляции 1 и 2 ($S = 6,6$ км) было определено превышение из геометри-

ческого нивелирования II класса. Профиль направления показан на рис. 3. Затем, преимущественно ночью, на этих пунктах теодолитами ОТ-02 по специальной программе производилось одновременное измерение зенитных расстояний на фонари «Люкас». На этих же пунктах на высотах 1,5 м, 3 м и 5,5 м велись измерения температуры и влажности воздуха психрометрами Асмана, а на высоте теодолитов (1,5 м) anerоидами определялось давление, регистрировалась облачность, направление и сила ветра.

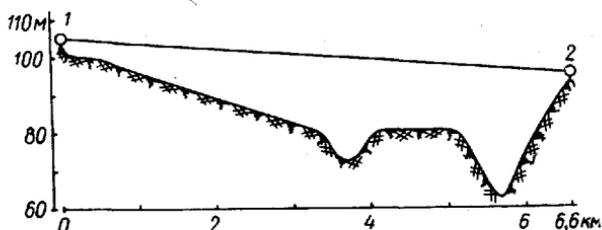


Рис. 3. Профиль направления 1—2.

Каждый прием измерений начинался и заканчивался метеорологическими наблюдениями, причем в начале и в конце приема психрометры отсчитывались дважды в порядке снизу — вверх и сверху — вниз. В промежутке между метеорологическими измерениями

наблюдались зенитные расстояния: 6 наведений трубы и 12 отсчетов микрометра при КЛ (КП) и столько же при КП (КЛ). Несколько в стороне от направления профиля, примерно на абсолютной отметке 100 м, велись аэростатные зондирования атмосферы на высотах 2, 10, 25, 50 м от поверхности земли. Наблюдения велись в период с 25 июля по 1 августа 1964 г. и позволили сравнивать коэффициенты преломления воздуха, полученные метеорологическими и геодезическими методами. Часть результатов вычислений и некоторые исходные данные приведены в таблице. В таблице приняты следующие обозначения:

$$\left(\frac{dn}{dh}\right)_c = \frac{k_c}{R_3} n_1 \operatorname{cosec} z_1; \quad \left(\frac{dn}{dh}\right)_1 = \frac{k_1}{R_3} \cdot n_1 \operatorname{cosec} z_1$$

$\left(\frac{dn}{dh}\right)_m$ — средний градиент коэффициента преломления на 1 м, вычисленный по наблюдаемым метеоэлементам в пунктах 1 и 2 на высотах 1,5 и 5,5 м; $N_1 = (n_1 - 1) \cdot 10^6$; $\Delta N_m = N_2 - N_1$;

$$\Delta N_c = \left(\frac{dn}{dh}\right)_c \cdot h; \quad \Delta N_1 = \left(\frac{dn}{dh}\right)_1 \cdot h; \quad h = -9,449 \text{ м.}$$

Сравнивая градиенты коэффициента преломления, полученные из геодезического нивелирования $\left(\frac{dn}{dh}\right)_c$ — двухстороннего и $\left(\frac{dn}{dh}\right)_1$ — одностороннего, замечаем, что $\left(\frac{dn}{dh}\right)_1 > \left(\frac{dn}{dh}\right)_c$. Это и понятно, так как из-за асимметрии профиля (рис. 3) $k_1 > k_2 > k_c$. С другой стороны, градиенты коэффициента преломления, вычисленные по метеоэлементам — $\left(\frac{dn}{dh}\right)_m$ в среднем в два раза больше, чем градиенты, полученные геодезическим методом, чего и следовало ожидать, ибо геодезические градиенты, вероятно, средние на всем пути луча (средняя высота луча 16 м), тогда как $\left(\frac{dn}{dh}\right)_m$ — градиенты в слое воздуха 1,5—5,5 м. Градиенты $\left(\frac{dn}{dh}\right)_c$ и $\left(\frac{dn}{dh}\right)_1$ хорошо согласуются с градиентами в слое воздуха 10—25 м, полученными из аэростатного зондирования.

Время	z	k_1	k_2	$K_c = \frac{k_1 + k_2}{2}$	$\left(\frac{dn}{dh}\right)_c \cdot 10^7$	$\left(\frac{dn}{dh}\right)_1 \cdot 10^7$	$\left(\frac{dn}{dh}\right)_m \cdot 10^7$	N_1	ΔN_c	ΔN_1	ΔN_m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
25/VII—64 г.											
22 42	90°03'55,1"	0,2474	0,1994	0,2234	-0,35	-0,39	-1,42	278,0	0,32	0,37	0,48
23 12	59,0	0,2116	0,1448	0,1782	-0,28	-0,33	-1,45	278,1	0,26	0,31	0,72
26/VII—64 г.											
22 38	02 29,9	1,0496	0,5925	0,8210	-1,29	-1,65	-2,25	280,6	1,16	1,56	0,12
23 15	32,9	1,0214	0,7872	0,9043	-1,42	-1,60	-1,95	281,2	1,29	1,50	0,72
27/VII—64 г.											
2 39	02 26,8	1,0787	0,6696	0,8742	-1,37	-1,69	-2,25	283,5	1,24	1,60	0,37
21 22	03 05,9	0,7110	0,4975	0,6042	-0,95	-1,12	-1,98	277,0	0,87	1,05	0,08
22 44	23,6	0,5446	0,4511	0,4978	-0,78	-0,86	-1,70	278,2	0,72	0,81	0,87
23 15	19,6	0,5822	0,5003	0,5412	-0,85	-0,91	-1,82	278,5	0,78	0,86	0,84
28/VII—64 г.											
0 41	03 30,9	0,4759	0,4166	0,4462	-0,70	-0,75	-1,65	279,6	0,65	0,70	0,65
1 15	12,1	0,6527	0,4477	0,5502	-0,86	-1,02	-1,85	280,0	0,79	0,97	0,10
3 16	02 47,3	0,8860	0,5380	0,7120	-1,12	-1,39	-2,50	280,7	1,01	1,31	0,64
20 34	03 16,3	0,6132	0,5220	0,5676	-0,89	-0,96	-2,30	274,4	0,82	0,91	0,21
21 13	02 16,1	1,1794	0,6696	0,9245	-1,45	-1,85	-2,50	275,1	1,30	1,75	0,51
23 14	03 18,8	0,5897	0,5982	0,5940	-0,93	-0,93	-1,45	276,7	0,86	0,88	1,26
29/VII—64 г.											
0 35	03 14,4	0,6311	0,6997	0,6654	-1,04	-0,99	-2,05	277,5	0,97	0,94	1,81
1 21	05,6	0,7138	0,7044	0,7091	-1,11	-1,12	-2,15	277,4	1,03	1,06	2,10
2 36	02 30,6	1,0430	0,4947	0,7688	-1,21	-1,64	-2,98	278,0	1,08	1,55	0,59
3 18	17,0	1,1709	0,6649	0,9179	-1,44	-1,84	-3,08	278,4	1,29	1,74	0,65
30/VII—64 г.											
5 50	02 26,2	1,0844	0,9819	1,0332	-1,62	-1,70	-3,00	279,9	1,49	1,61	1,76
6 15	03 06,2	0,7091	0,7364	0,7227	-1,14	-1,11	-2,05	279,5	1,05	1,05	1,20
6 45	03 40,8	0,3828	0,5210	0,4519	-0,71	-0,60	-0,58	278,8	0,66	0,57	0,60
31/VII—64 г.											
2 39	90 04 03,2	0,1721	0,1298	0,1510	-0,24	-0,27	-0,45	278,6	0,22	0,26	0,87
19 16	07,7	0,1298	0,1326	0,1312	-0,21	-0,20	-0,40	279,4	0,19	0,19	0,27
21 15	02 50,0	0,8606	0,5474	0,7040	-1,11	-1,35	-2,85	283,9	1,00	1,28	0,14
22 34	47,1	0,8878	0,6160	0,7519	-1,18	-1,39	-3,62	286,6	1,07	1,32	0,08

Сопоставляя разности между коэффициентами преломления в конечных точках луча, полученные из геодезических измерений (ΔN_c — из двухсторонних наблюдений, ΔN_1 — из односторонних наблюдений), с разностями ΔN_m , полученными из метеонаблюдений, замечаем, что разности $\Delta N_c - \Delta N_m$ не превышают $1 \cdot 10^{-6}$, а разности $\Delta N_1 - \Delta N_m$ не превышают $1,4 \cdot 10^{-6}$. Такой контроль геодезических методов достаточно «жесткий» и дает основания полагать, что с достаточно высокой точностью эти методы позволяют определить n из единичных приемов измерений. Точность определения n можно повысить, если, используя n_1 и n_2 , а также z_1 и z_2 , определять среднеинтегральное значение

коэффициента преломления на пути луча дважды — \bar{n}_1 и \bar{n}_2 . За окончательный результат можно принимать среднее или среднее взвешенное значение, беря за веса эквивалентные высоты луча.

Минимальное значение R_c по нашим измерениям составляет 5440 км, что при длине базисной стороны в 25 км дало бы далеко не пренебрегаемую величину ΔS , равную 22,9 мм. На согласованность величин R_c , полученных геодезическими и метеорологическими измерениями, указывалось ранее в работе [1]. Представляется целесообразной экспериментальная проверка геодезических методов определения n в горных условиях с привлечением светодальномерных измерений и с учетом уклонений отвесных линий. Такую проверку в дальнейшем мы намерены произвести.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Д. Мирошник, А. Л. Островский, Н. П. Симиков. Некоторые вопросы светодальномерных измерений. «Геодезия и картография», № 1, 1964.
2. J. Saastamoinen. The effect of path curvature of light waves in the refractive index application to electronic distance measurement. "Canad Surveyor", 16, N 2, 1962.

Работа поступила
24 апреля 1965 г.