Л. И. КОРДЮК

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ НОВОЙ ПРОЕКЦИИ, БЛИЗКОЙ К ПРОЕКЦИИ ГАУССА

Формулы новой проекции, близкой к проекции Гаусса, имеют вид [1]:

$$x = m_0\left[X + \frac{l^2}{2!} N\sin B\cos B + \frac{l^4}{4!} N\sin B\cos^3 B\,(5V^2 - t^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{l^6}{6!} N\sin B\cos^5 B\,(61 - 58t^2 + t^4)\right]; \qquad (1)$$

$$y = m_0\, l N\cos B\left[1 + \frac{l^2}{3!}\cos^2 B\,(V^2 - t^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{l^4}{5!}\cos^4 B\,(5 - 18t^2 + t^4 + 10\eta^2 - 22\eta^2 t^2)\right]; \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg} l\sin B\left[1 + \frac{l^2}{3}\cos^2 B\,(3\eta^2 + 2\eta^4)\right]; \qquad (3)$$

$$\gamma = l\sin B\left[1 + \frac{l^2}{3}\cos^2 B\,(1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{l^4}{15}\cos^4 B\,(2 - t^2)\right]; \qquad (4)$$

$$m = m_0\left[1 + \frac{l}{2!} V^2\cos^2 B + \frac{l^4}{4!} V^4\cos^4 B\,(5 - 4t^2)\right]. \qquad (5)$$

Логарифмируя (1), (2), (3), (5) и разлагая их правые части в ряды, напишем:

$$\lg(x - m_0 X) = \lg m_0 N + \lg l\cos B + \lg\frac{l}{2}\sin B +$$
$$+ \frac{\mu l^2}{12}\cos^2 B\,(5V^2 - t^2) + \frac{\mu l^4}{1440}\cos^4 B\,(119 - 182t^2 - t^4); \qquad (6)$$

$$\lg y = \lg m_0 N + \lg l\cos B + \frac{\mu l^2}{6}\cos^2 B\,(V^2 - t^2) +$$
$$+ \frac{\mu l^4}{180}\cos^4 B\,(5 - 22t^2 - t^4); \qquad (7)$$

$$\lg\operatorname{tg}\gamma = \lg\operatorname{tg} l\sin B + \frac{\mu l^2}{3}\cos^2 B\,(3\eta^2 + 2\eta^4); \qquad (8)$$

$$\lg m = \lg m_0 + \frac{\mu l^2}{2} V^2\cos^2 B + \frac{\mu l^4}{12}\cos^4 B\,(1 - 2t^2), \qquad (9)$$

где членами с $l^4\eta^2$ пренебрегаем, ввиду их малости.

С целью сокращения числа поправочных членов в формулах (6), (7), (8) и (9) воспользуемся формулой (385) для сфероидической ординаты из работы [2], которую напишем так:

$$u = l\cos B - \frac{l^3}{3!}\cos^3 B\, t^2 - \frac{l^5}{5!}\cos^5 B t^2 (8V^2 - t^2), \tag{10}$$

где $u = \frac{Y}{N}$.

Теперь найдем значение $\sin u$ с помощью ряда

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots,$$

подставляя u из (10) в это разложение, после преобразований, найдем:

$$\sin u = \sin l \cos B\left(1 - \frac{l^4}{60}\eta^2 \sin^2 2B\right), \tag{11}$$

где членом с $l^4\eta^2$ при вычислении u будем пренебрегать ввиду его малости.

Рассматривая $u = \frac{Y}{N}$ и (11) замечаем, что u является сферической ординатой точки на поверхности сферы радиуса N; эта точка имеет широту B и долготу l. Формула (11) также следует из решения полярного прямоугольного треугольника сферических прямоугольных координат.

Логарифмируя (10), найдем:

$$\lg u = \lg l\cos B - \frac{\mu l^2}{6}\cos^2 B t^2 - \frac{\mu l^4}{180}\cos^4 \mathrm{B}\, t^2 (12 + t^2), \tag{12}$$

где членом с $l^4\eta^2$ пренебрегаем.

Из (10) в силу обратимости рядов, получим:

$$l\cos B = u + \frac{u^3}{3!}t^2 + \frac{u^5}{5!}t^2(8V^2 + 9t^2). \tag{13}$$

С помощью (13) формулу (9) приводим к виду:

$$\lg m = \lg m_0 + (3)u^2 + (8)u^4, \tag{14}$$

где, аналогично работе [3], положили:

$$(3) = \frac{\mu V^2}{2\rho^2}; \qquad (8) = \frac{\mu}{12\rho^4}; \tag{15}$$

$$lg\, m_0 = -0{,}00010858;$$

при этом u выражаем в секундах.

Далее, подставляя значение $\lg l\cos B$ из (12) в (7) и учитывая (13), получаем

$$\lg y = \lg m_0 + \lg uN + \frac{\mu V^2}{6}u^2 + \frac{\mu}{36}u^4.$$

Выражая u в секундах и принимая во внимание (14), будем иметь:

$$\lg y = \lg\frac{Nu}{\rho} + \frac{1}{3}[\lg m + 2\lg m_0]. \tag{16}$$

С помощью (13) формулу (8) приводим к виду:

$$\lg \operatorname{tg} \gamma = \lg \operatorname{tg} l \sin B + (5) u^2, \tag{17}$$

$$\text{где } (5) = \frac{\mu}{3\rho^2}(3\eta^2 + 2\eta^4), \tag{18}$$

u выражено в секундах.

Чтобы заменить $\lg \frac{l}{2} \sin B$ в формуле (6) через γ, необходимо найти $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ с помощью разложения

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^3}{24} + \frac{\gamma^5}{240} + \cdots$$

Подставляя значение γ из (4) в это разложение и логарифмируя его, будем иметь:

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \lg \frac{l}{2} \sin B + \frac{\mu l^2}{12} \cos^2 B (4 + t^2 + 12\eta^2 + 8\eta^4) +$$

$$+ \frac{\mu l^4}{1440} \cos^4 B (112 - 16 t^2 + 7 t^4). \tag{19}$$

Подставляя значения $\lg l \cos B$ и $\lg \frac{l}{2} \sin B$ из формул (12) и (19) в (6), получим:

$$\lg (x - m_0 X) = \lg \left(m_0 N u \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\mu l^2}{12} \cos^2 B (1 - 7\eta^2 - 8\eta^4) +$$

$$+ \frac{\mu l^4}{1440} \cos^4 B (7 - 70 t^2).$$

Выражая u в секундах, с помощью (13) эту формулу приводим к виду:

$$\lg (x - m_0 X) = \lg \left(m_0 N \frac{u}{\rho} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) + (14) u^2 + \ldots, \tag{20}$$

$$\text{где } (14) = \frac{\mu}{12\rho^2}(1 - 7\eta^2 - 8\eta^4), \tag{21}$$

при этом пренебрегаем членом $+ \frac{\mu u^4 (7 - 30 t^2)}{1440 \rho^4}$ ввиду его малости.

Формулы (10), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (20), (21) являются окончательными при логарифмических вычислениях.

Логарифмические формулы для вычисления геодезических координат, сближения меридианов и масштаба изображения получим с помощью следующих формул проекции [1]:

$$B_0 - B = \frac{\bar{y}^2 t_0}{2! M_0 N_0} - \frac{\bar{y}^4 t_0}{4! M_0 N_0^3}(5 V_0^2 + 3 t_0^2 - 9 \eta_0^2 t_0^2) +$$

$$+ \frac{\bar{y}^6 t_0}{6! M_0 N_0^5}(61 + 90 t_0^2 + 45 t_0^4); \tag{22}$$

$$l = \frac{\bar{y}}{N_0} \sec B_0 \left[1 - \frac{\bar{y}^2}{3! N_0^2}(V_0^2 + 2 t_0^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{y}^4}{5! N_0^4}(5 + 28 t_0^2 + 24 t_0^4 + 10 \eta_0^2 - 8 \eta_0^2 t_0^2)\right]; \tag{23}$$

$$\gamma = t_0 \left[\frac{\bar{y}}{N_0} - \frac{\bar{y}^3}{3N_0^3}(1 + t_0^2 - \eta_0^2 - 2\eta_0^4) + \frac{\bar{y}^5}{15N_0^5}(2 + 5t_0^2 + 3t_0^4) \right]; \quad (24)$$

$$m = m_0 \left[1 + \frac{\bar{y}^2}{2!N_0^2} V_0^2 + \frac{\bar{y}^4 V_0^4}{4!N_0^4} \right]; \quad (25)$$

$$Y = \bar{y} + \frac{\bar{y}^3}{3!N_0^2} V_0^2 + \frac{\bar{y}^5}{5!N_0^4}(5 + 10\eta_0^2 - 36\eta_0^2 t_0^2); \quad (26)$$

$$\bar{y} = Y + \frac{Y^3}{3!N_0^2} V_0^2 + \frac{Y^5}{5!N_0^4}(5 + 10\eta_0^2 + 36\eta_0^2 t_0^2). \quad (27)$$

Логарифмируя (25) и разлагая в ряд правую часть этого выражения, найдем масштаб изображения в следующем виде:

$$\lg m = \lg m_0 + (3)_0 \sigma_0^2 - (8)\sigma_0^4, \quad (28)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\bar{y}}{N_0};$$

$$(3)_0 = \frac{\mu V_0^2}{2\rho^2}; \quad (29)$$

$$(8) = \frac{\mu}{12\rho^4}.$$

Разделив левую и правую части выражения (26) на N_0, получим:

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{\sigma_0^3}{3!} V_0^2 + \frac{\sigma_0^5}{5!}(5 + 10\eta_0^2 - 36\eta_0^2 t_0^2), \quad (30)$$

где

$$\sigma = \frac{Y}{N_0}. \quad (31)$$

Логарифмируя (30) и разлагая в ряд правую часть выражения, найдем:

$$\lg \sigma = \lg \sigma_0 - \frac{\mu\sigma_0^2}{6} V_0^2 + \frac{\mu\sigma_0^4}{36} \cdots,$$

членом с $\sigma_0^4 \eta_0^2$ при этом пренебрегаем.

Выражая σ и σ_0 в секундах и учитывая (28), будем иметь:

$$\lg \sigma = \lg \sigma_0 - \frac{1}{3}[\lg m - \lg m_0]. \quad (32)$$

Аналогично предыдущему из (27) напишем:

$$\sigma_0 = \sigma + \frac{\sigma^3}{3!} V_0^2 + \frac{\sigma^5}{5!}(5 + 10\eta_0^2 + 36\eta_0^2 t_0^2). \quad (33)$$

Введем обозначение σ_0 в (23) и, учитывая (33), получим:

$$l = \sec B_0 \left[\sigma - \frac{\sigma^3}{3} t_0^2 + \frac{\sigma^5}{15} t_0^2 (1 + 3t_0^2 + \eta_0^2) \right]. \quad (34)$$

Далее, как известно, имеем:

$$\operatorname{tg} l = l + \frac{l^3}{3} + \frac{2l^5}{15} + \cdots,$$

тогда подставляя значение l из (34) в это разложение, получим tg долготы от осевого меридиана зоны в следующем виде:

$$\operatorname{tg} l = \operatorname{tg}\sigma \sec B_0 \left[1 + \frac{\sigma^4}{15}\eta_0^2 t_0^2\right]$$

или

$$\lg \operatorname{tg} l = \lg \operatorname{tg} \sigma \sec B_0 + \ldots, \tag{35}$$

где членом с $\sigma^4\eta_0^2$ пренебрегаем.

Рассматривая $\sigma_0 = \frac{Y}{N_0}$ и (35), мы видим, что σ является сферической ординатой точки на сфере радиуса N_0; эта точка имеет широту B_0 и долготу l. Формула (35) следует также из решения прямоугольного сферического треугольника. Теперь заменим $\frac{Y}{N_0}$ через σ_0 в формуле (24) и, принимая во внимание (33), ее напишем так:

$$\gamma = t_0\left[\sigma - \frac{\sigma^3}{3!}(1 + 2t_0^2 - 3\eta_0^2 - 4\eta_0^4) + \frac{\sigma^5}{5!}(1 + 20t_0^2 + 24t_0^4)\right].$$

С помощью разложения тангенса это выражение приводим к виду:

$$\operatorname{tg}\gamma = t_0 \sin\sigma\left[1 + \frac{\sigma^2}{6}(3\eta_0^2 + 4\eta_0^4)\right].$$

Логарифмируя это выражение и разлагая в ряд, найдем:

$$\lg \operatorname{tg}\gamma = \lg t_0 \sin\sigma + (7)_0\,\sigma^2, \tag{36}$$

где

$$(7)_0 = \frac{\mu}{6\rho^2}(3\eta_0^2 + 4\eta_0^4). \tag{37}$$

Аналогично предыдущему, найдем $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sigma t_0}{2}\left[1 - \frac{\sigma^2}{12}(2 + 3t_0^2 - 6\eta_0^2 - 8\eta_0^4) + \frac{\sigma^4}{120}(1 + 15t_0^2 + 15t_0^4)\right].$$

Логарифмируя это выражение и разлагая в ряд правую часть, получим:

$$\lg \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \lg\frac{\sigma}{2}t_0 - \frac{\mu\sigma^2}{12}(2 + 3t_0^2 - 6\eta_0^2 - 8\eta_0^4) -$$

$$- \frac{\mu\sigma^4}{1440}(8 - 120t_0^2 - 135t_0^4). \tag{38}$$

Теперь еще заменим $\frac{\bar{y}}{N_0}$ через σ_0 в (22) и, с помощью (33), ее напишем так:

$$B_0 - B = \frac{\bar{y}\sigma}{2M_0}t_0\left[1 - \frac{\sigma^2}{4}(V_0^2 + t_0^2 - 3\eta_0^2 t_0^2) + \frac{\sigma^4}{360}(1 + 45t_0^2 + 45t_0^4)\right].$$

Логарифмируя это выражение и учитывая (38), будем иметь:

$$\lg(B_0 - B)'' = \lg\left(\frac{\bar{y}\rho \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{M_0}\right) - (9)_0\sigma^2, \tag{39}$$

где

$$(9)_0 = \frac{\mu}{12\rho^2}(1 + 9\eta_0^2 - 9\eta_0^2 t_0^2 + 8\eta_0^4), \tag{40}$$

при этом пренебрегаем членом с

$$-\frac{\mu\sigma^4}{1440\rho^4}(33+30t_0^2).$$

Формулы (28), (29), (32), (33), (34), (35), (36), (39) и (40) дают решения поставленной задачи.

Приведенные формулы являются весьма точными и по форме близки к аналогичным формулам Ф. Н. Красовского—А. А. Изотова. При вычислении проекции удобно воспользоваться «Таблицами для логарифмического вычисления координат Гаусса—Крюгера» проф. Ф. Н. Красовского и А. А. Изотова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Кордюк. Новая проекция, близкая к проекции Гаусса. Научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэросъемка», выпуск 2. Изд-во Львовского ун-та, 1965.
2. Ф. Н. Красовский. Избранные сочинения, том IV. Геодезиздат, М., 1955.
3. Ф. Н. Красовский, А. А. Изотов. Таблицы для логарифмического вычисления координат Гаусса—Крюгера. Геодезиздат, М., 1946.

Работа поступила
1 марта 1965 г.