

А. Л. ДОРОЖИНСКИЙ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЕСОВ ПОПЕРЕЧНЫХ ПАРАЛЛАКСОВ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВЗАИМНОГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ

Элементы взаимного ориентирования (ЭВО) в современных аналитических способах построения пространственных фототриангуляционных сетей определяются по 9—15 поперечным параллаксам, измеренным на различных точках стереопары. В таких случаях задача опре-

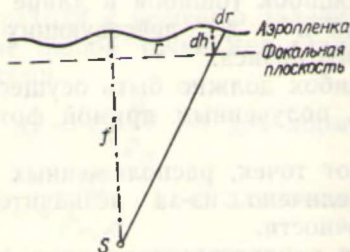


Рис. 1. Влияние невыравнивания пленки на изменение положения точки.

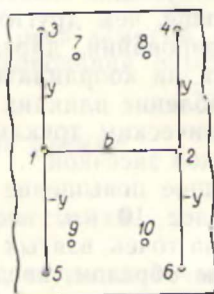


Рис. 2. Схема расположения точек на стереопаре.

деления ЭВО решается по способу наименьших квадратов, но почти всегда под условием  $[vv] = \min$ . На самом деле нет никакого основания считать поперечные параллаксы равноточными величинами. Даже самый поверхностный анализ условий построения и измерения снимков убеждает нас в этом. Этот вопрос в большей или меньшей степени затрагивался в литературе [2, 3, 4], но для внесения полной ясности рассмотрим один пример, подтверждающий это положение.

Как известно из исследований (например, [1]), невыравнивание пленки в плоскости прикладной рамки аэрофотоаппарата характеризуется средней квадратической ошибкой  $m_h \approx 0,006$  мм. Из рис. 1 следует, что влияние невыравнивания на координаты зависит от радиус-вектора точки:

$$dr = \frac{r}{f} dh \quad \text{или} \quad m_r = \frac{r}{f} m_h. \quad (1)$$

Вычислим среднюю квадратическую ошибку поперечных параллакс точек 1 и 4 стандартной схемы (рис. 2).

$$\begin{aligned} q_1 &= y_1 - y'_1, & m_{q_1}^2 &= m_{y_1}^2 + m_{y'_1}^2, \\ q_4 &= y_4 - y'_4, & m_{q_4}^2 &= m_{y_4}^2 + m_{y'_4}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $y$  — ордината точки на левом снимке,  
 $y'$  — ордината точки на правом снимке.  
 Согласно (1),

$$m_{y_1}^2 = 0, \quad m_{y_1'}^2 = 0,$$

$$m_{y_4}^2 = \frac{y_4^2}{f^2} m_h^2, \quad m_{y_4'}^2 = \frac{y_4'^2}{f^2} m_h^2. \quad (3)$$

При  $y \approx j$  окончательно получим, подставив (3) в (2):

$$m_{q_1}^2 = 0,$$

$$m_{q_4}^2 = 2m_h^2.$$

Вполне ясно, что веса точек 1 и 4 не могут быть одинаковыми.

О влиянии весов поперечных параллаксов на определение ЭВО впервые указал шведский ученый Б. Халлерт. В его работе [4] это влияние иллюстрируется в аналитическом виде, причем веса на симметричных точках стандартной схемы приняты одинаковыми. Влияние априорных весов поперечных параллаксов на вероятнейшие значения ЭВО видно из таких рассуждений. Система уравнений ошибок вида

$$a_i \alpha + b_i \alpha' + c_i \omega' + d_i x' + e_i x' + l_i = v_i \quad (4)$$

в случае неучета весов ( $\rho_i = 1$ ) преобразуется в систему нормальных уравнений, записанную в матричной форме,

$$AX + L = 0, \quad (5)$$

где

$$a_i = -\frac{xy'}{f\rho}; \quad b_i = \frac{x'y}{f\rho}; \quad c_i = \frac{1}{\rho} \left( f + \frac{yy'}{f} \right);$$

$$d_i = -\frac{1}{\rho} x; \quad e_i = \frac{1}{\rho} x'; \quad l_i = q;$$

$\rho_i$  — априорный вес измеренного поперечного параллакса;

$x, y$  — координаты точки на левом снимке;

$x', y'$  — координаты точки на правом снимке;

$f$  — фокусное расстояние;

$q$  — измеренный поперечный параллакс;

$\rho = 3437', 748$ ;

$A$  — матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных;

$L$  — матрица, составленная из свободных членов нормальных уравнений.

При решении системы (5) искомые неизвестные определяются:

$$\alpha = \frac{D_\alpha}{D}; \quad \alpha' = \frac{D_{\alpha'}}{D}; \quad \omega' = \frac{D_{\omega'}}{D}; \quad x = \frac{D_x}{D}; \quad x' = \frac{D_{x'}}{D}, \quad (6)$$

где  $D_i, D$  — определители соответствующей матрицы.

Например:

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} [al] & [ab] & [ac] & [ad] & [ae] \\ [bl] & [bb] & [bc] & [bd] & [be] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [el] & [be] & [ce] & [de] & [ee] \end{vmatrix} \quad (7)$$

При решении системы (4) под условием  $[p\sigma\sigma] = \min$  имеем систему нормальных уравнений вида

$$A'X + L' = 0 \quad (8)$$

отличную от системы (5).

При решении новой системы те же искомые неизвестные определяются так:

$$\alpha = \frac{D'_\alpha}{D'}, \quad \alpha' = \frac{D'_{\alpha'}}{D'}; \quad \omega = \frac{D'_{\omega'}}{D'}; \quad z = \frac{D'_z}{D'}; \quad z' = \frac{D'_{z'}}{D'}, \quad (9)$$

где  $D'_\alpha$ , например, равно:

$$D'_\alpha = \begin{vmatrix} [pal] [pab] [pac] [pad] [pae] \\ [pbl] [pbb] [pbc] [pbd] [pbe] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ [pel] [pbe] [pce] [pde] [pee] \end{vmatrix} \quad (10)$$

Величины (6) и (9) равны между собой, когда соответствующие детерминанты претерпевают пропорциональное изменение. В общем случае это невозможно, так как при  $v_1 \neq v_2 \neq \dots \neq v_n \neq 0$  ни одно из уравнений системы (4) не тождественно любому другому уравнению этой же системы. Коэффициенты нормальных уравнений являются линейной комбинацией из элементов системы (5), умноженных на соответствующие веса. Например:

$$\begin{aligned} [paa] &= p_1 a_1 a_1 + p_2 a_2 a_2 + \dots + p_n a_n a_n, \\ [aa] &= a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n, \\ [pab] &= p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots + p_n a_n b_n, \\ [ab] &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как  $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$ ,  $a_1 \neq a_2 \neq b_1 \neq b_2 \neq \dots$ , то пропорционального изменения столбцов или строк соответствующих детерминантов наблюдать не будем. Если  $v_i = \text{const}$  (частный случай  $v_i = 0$ ), то в системе (5) все уравнения тождественны между собой, и умножение любого из них на произвольный коэффициент  $p_i$  не повлечет за собой изменения величин ЭВО. Правда, в этом случае также не наблюдается пропорционального изменения столбцов или строк, соответствующих детерминантов вследствие (11). Как увидим ниже, это положение подтвердилось экспериментально.

Целью нашей работы являлось определение экспериментальным путем величины влияния весов поперечных параллаксов для различных случаев, а также выведения общих закономерностей этого влияния. Все исследования проводились на числовых макетах-стереопарах. Для получения большого объема информации, пригодного для статистического изучения, была использована ЭЦВМ «Минск-1» лаборатории вычислительной техники Львовского политехнического института.

Макеты строились по формуле

$$q_0 = -(ax_0 + bx'_0 + c\omega'_0 + dx_0 + ex'_0), \quad (12)$$

принятой за строгую. Здесь  $\alpha_0$ ,  $\alpha'_0$ ,  $\omega'_0$ ,  $x_0$ ,  $x'_0$  — истинные (заданные) значения ЭВО; координатами точек задавались для двух случаев местности: плоской и всхолмленной; фокусное расстояние — также заданная величина.

Для составления уравнений ошибок в истинное значение поперечного параллакса вводилась заданная нами ошибка  $\delta q$ , в результате чего вычислялся свободный член  $l=q_0+\delta q$ . Затем вычислялись коэффициенты нормальных уравнений, причем законом распределения весов мы также задавались. Решение системы нормальных уравнений производилось методом поиска главных элементов; полученные вероятнейшие значения ЭВО сравнивались с их истинными значениями и вычислялись ошибки

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha - \alpha_0, \\ \Delta\alpha' &= \alpha' - \alpha'_0, \\ \Delta\omega' &= \omega' - \omega'_0, \\ \Delta\kappa &= \kappa - \kappa_0, \\ \Delta\kappa' &= \kappa' - \kappa'_0 \end{aligned} \quad (13)$$

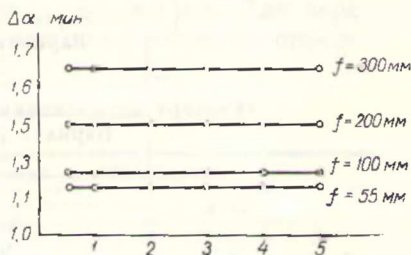


Рис. 3. Зависимость точности определения ЭВО от углов наклона.

Величины (13) и явились исходным материалом для дальнейшего анализа.

Приведем краткую характеристику исходных данных.

1) Число точек для всех стереопар равно десяти; схема расположения точек показана на рис. 3.

2) Закон распределения ошибок  $\delta q_i$  нами задавался для таких теоретически возможных случаев: а)  $\delta q_i$  на всех точках равно нулю; б)  $\delta q_i$  увеличивается по мере удаления от центра снимка, но абсолютная величина не превышает 0,005 мм; в)  $\delta q_i$  увеличивается по мере удаления от центра снимка, но по абсолютной величине не превышает 0,03 мм; г)  $\delta q_i$  на всех точках равны ( $\delta q_i = \text{const}$ ); д) распределение ошибок  $\delta q_i$  носит случайный характер и не зависит от радиуса-вектора точки.

3) Закон распределения весов поперечных параллаксов принимался следующим: а) веса на всех точках равны единице, б) вес каждого параллакса вычислялся как

$$p_1 = \frac{\delta q_k^2}{\delta q_1^2},$$

$$p_2 = \frac{\delta q_k^2}{\delta q_2^2}, \dots, p_n = \frac{\delta q_k^2}{\delta q_n^2},$$

то есть точке с максимальной ошибкой  $\delta q_k$  присваивался вес равный единице; в) веса в точках 1 и 2 равны двум, на всех остальных — единице; г) приписывание весов всем точкам носит произвольный характер; 4) Элементы взаимного ориентирования в таких шести вариантах не превышали:

$$\begin{aligned} \text{а) ЭВО} &\leq 30', & \text{б) ЭВО} &\leq 1^\circ, & \text{в) ЭВО} &\leq 2^\circ, \\ \text{г) ЭВО} &\leq 3^\circ, & \text{д) ЭВО} &\leq 4^\circ, & \text{е) ЭВО} &\leq 5^\circ. \end{aligned}$$

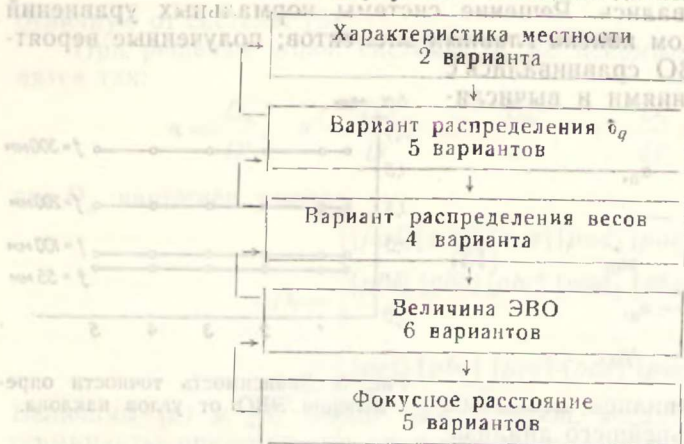
5) Обработывались снимки с фокусными расстояниями 55, 70, 100, 200, 300 мм.

По описанному выше алгоритму была составлена программа для ЭВМ. При программировании учитывалась циркуляция исходных данных, происходящая по приведенной ниже схеме.

Программа позволила при одном вводе исходных данных обработать  $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$  стереопар. Изменение данных о характеристике

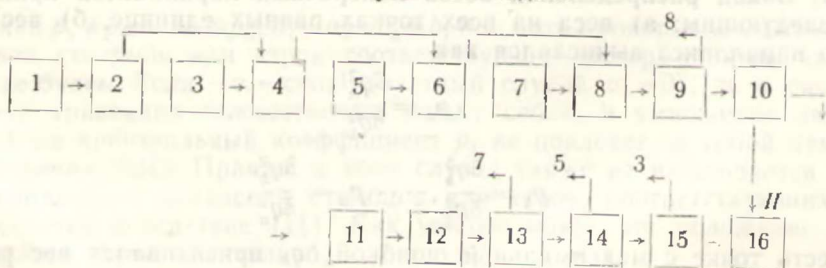
местности и распределении  $\delta q$  вводилось с перфоленты дополнительно в оперативную память машины. Всего было обработано  $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 = 1200$  стереопар.

### Схема циркуляции исходных данных



Особенности программирования для ЭВЦМ «Минск-1», а также невозможность использования по техническим причинам внешней памяти машины заставили нас остановить свой выбор на таком упрощенном алгоритме. Вполне ясно, что существенными недостатками его является принятие в качестве строгой математической зависимости выражения (12), но такое упрощение, по сути дела, позволило нам исследовать в общем случае не весь итерационный процесс, а только одну итерацию. В случае плоской местности и небольших углов наклона исследуется весь итерационный процесс (то есть, если число итераций равно 1).

### Блок-схема решения задачи



- 1 — перевод чисел из 10→2;
- 2 — восстановление  $p_i$ ;
- 3 — переадресация  $p_i$ ;
- 4 — восстановление  $\alpha_i, \dots, x_i$ ;
- 5 — переадресация  $\alpha_i, \dots, x_i$ ;
- 6 — восстановление  $f_i, \delta q_i$ ;
- 7 — переадресация  $f_i, \delta q_i$ ;
- 8 — вычисление  $a_i, \dots, e_i, l_i$ ;
- 9 — проверка по числу точек;
- 10 — вычисление коэффициентов нормальных уравнений;
- 11 — решение системы нормальных уравнений;
- 12 — нахождение  $\Delta\alpha, \dots, \Delta x'$ , перевод 2→10, печать;
- 13 — проверка по  $f_i$ ;
- 14 — проверка по  $\alpha, \dots, x'$ ;
- 15 — проверка по  $p_i$ ;
- 16 — останов.

## ВЫВОДЫ

1. Априорные веса поперечных параллаксов влияют на определение элементов взаимного ориентирования. В качестве иллюстрации приведем один из типичных примеров влияния весов на вероятнейшее ЭВО (см. таблицу). Правильный учет весов повышает точность определения ЭВО для плоской местности при  $\alpha \leq 2^\circ$  в среднем в 1,7 раза при остаточных поперечных параллаксах  $|\delta q_{\max}| \leq 0,003$  мм. Для пере-сеченной местности правильный учет весов повышает точность определения ЭВО в одной итерации в 1,3 раза.

**Пример влияния априорных весов параллаксов на точность определения ЭВО**

Вариант <i>p</i>	Максимальное отклонение в ЭВО при														
	$\alpha=30'$					$\alpha=1^\circ$					$\alpha=2^\circ$				
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
<i>pI</i>	1,16	1,18	1,24	1,50	1,69	1,16	1,17	1,24	1,50	1,69	1,17	1,18	1,24	1,50	1,69
<i>pII</i>	0,83	0,83	0,83	0,90	0,95	0,83	0,83	0,83	0,90	0,95	0,83	0,83	0,83	0,90	0,95
<i>pIII</i>	0,94	0,95	1,18	1,22	1,43	0,94	0,95	1,18	1,22	1,53	0,94	0,95	1,18	1,23	1,43
<i>pIV</i>	2,17	2,20	2,27	2,30	2,38	2,17	2,20	2,27	2,30	2,38	2,17	2,20	2,27	2,30	2,38
	$f_1 = 55$ мм			$f_2 = 70$ мм		$f_3 = 100$ мм			$f_4 = 200$ мм		$f_5 = 300$ мм				

Примечание. Закон распределения весов взят согласно приведенной в тексте краткой характеристике исходных данных. Для приведенного примера  $|\delta q_{\max}| < 0,003$  мм.

2. Влияние весов параллаксов не зависит от углов наклона снимков (для плоской и всхолмленной местности; см. рис. 3).

3. Влияние весов параллаксов зависит от фокусного расстояния (см. рис. 3).

4. При  $\delta q_i = \text{const}$ , то есть при введении одинаковой систематической ошибки в поперечные параллаксы на всех точках, точность определения ЭВО не зависит от закона распределения весов (частный случай  $\delta q_i = 0$  использовался в качестве контрольного варианта; в этом случае величины (13) равны нулю).

5. Неучет весов поперечных параллаксов в большинстве случаев оказывает наибольшее влияние на углы  $\kappa$  и  $\kappa'$ . В случае всхолмленной местности при остаточных поперечных параллаксах  $|\delta q_{\max}| \leq 0,003$  мм величины  $\Delta \kappa$  достигали  $2'$ .

6. Следует ожидать, что при определении ЭВО итерациями и оценке этого процесса по сходимости двух последних итераций ( $\delta \alpha_{\text{доп}}$ ) в случае правильного учета весов мы добьемся ускорения итерационного процесса, а также точности определения ЭВО.

В случае неучета весов процесс итераций несколько удлинится; точность определения ЭВО будет в допуске, если критерием окончания процесса принять  $\delta \alpha_{\text{доп}}$ , но, возможно, распределение остаточных поперечных параллаксов будет не совсем правильным. Последнее предположение нуждается в экспериментальной проверке.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дервиз В. Д. Исследование выравнивания аэропленки в аэрофотоаппарате. Тр. ЦНИИГАиК, выд. 122, М., 1957.
2. Ghosh S. K. Determination of weights of parallax observation for numerical relation orientation. «Photogram. Eng.», 1963, 29, № 5.
3. Hallert B. Definition and determination of weights of fundamental photogrammetric data and results. «Photogram. Eng.», 1963, 29, № 6.
4. Hallert B. Investigation of the weights of image coordinates in aerial photographs. «Boll. geod. e sci. affini», 1961, 20, № 4.

Работа поступила  
20 мая 1967 г.