УДК 528.14

В. А. СКРЫЛЬ

О СОСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПОПРАВОК ПРИ УРАВНИВАНИИ МЕТОДОМ ЧЕБЫШЕВСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Пусть дана возникающая при уравновешивании результатов наблюдений несовместная относительно x система уравнений поправок в линейном виде

$$Ax+l=v, \tag{1}$$

где A — прямоугольная матрица размера $k\times n$ $(k>n)$ ранга n; $x=(x_1, x_3, \ldots, x_n)$ — вектор поправок к приближенному значению параметров; $l=(l_1, l_2, \ldots, l_к)$ — вектор свободных членов; $v=(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ — вектор уклонений от нулевого вектора.

Задача наилучшего в смысле Чебышева (равномерного) приближения для системы (1), заключающаяся в минимизации наибольшего из абсолютных значений уклонений

$$\max|Ax+l|=L=L(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\min, \tag{2}$$

уже достаточно полно описана в литературе [3, 4]. Основным ее положением является то, что величина наилучшего приближения L для системы (1) совпадает с наибольшим значением величины наилучшего приближения, относящейся ко всевозможным подсистемам по $n+1$ уравнений, и равняется $\pm L$. То есть, в результате решения задачи (1)—(2) будем иметь $n+1$ максимальных, равных $\pm L$ уклонений v.

Как известно, в способе наименьших квадратов существует два основных метода уравнивания: способ посредственных измерений (параметрический) и способ условных измерений (коррелатный), являющиеся различными алгебраическими приемами использования математических соотношений между результатами измерений, возникающих благодаря наличию избыточных измерений.

При уравнивании по методу чебышевских приближений для решения непосредственно условных уравнений не существует в достаточной мере разработанного алгоритма. Поэтому фактически отпадает разделение на два указанных классических приема способа наименьших квадратов и задача уравнивания по способу минимакса сводится к решению уравнений поправок, соответствующих способу посредственных измерений.

Ниже рассмотрим вывод уравнений поправок из условных уравнений, а главное — непосредственное образование уравнений поправок для двух типовых фигур триангуляции (центральной системы и геодезического четырехугольника).

Пусть в некоторой геодезической сети возникает r независимых условных уравнений, приведенных к линейному виду

$$Bv+W=0, \tag{3}$$

где B — прямоугольная матрица размера $r\times k$; $W=(w_1, w_2, \ldots, w_r)$ — вектор невязок; а вектор $v=(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ здесь имеет тот же смысл, что и в системе (1).

Выполним переход от системы условных уравнений (3) к системе уравнений поправок вида (1) [2]. Для этого выберем (по числу необходимых неизвестных) $n=k-r$ уклонений, например $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Затем выразим все остальные уклонения в функции выбранных $v_1, v_2, \ldots, v_n$, действуя по правилам алгебры, например, с помощью жордановых исключений. В результате придем к системе $k=n+r$ уравнений поправок вида (1) с n неизвестными поправками в приближенные значения параметров. В развернутом виде система примет вид

$$\left.\begin{aligned} &v_1 = x_1\\ &v_2 = x_2\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &v_n = x_n;\\ &v_{n+1} = a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + h_1x_n + l_1\\ &v_{n+2} = a_2x_1 + b_2x_2 + \dots + h_2x_n + l_2\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &v_{n+r} = a_rx_1 + b_rx_2 + \dots + h_rx_n + l_r \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Теперь задача уравнивания нашей фигуры сведена к обычной задаче (1)—(2) для системы линейных несовместных уравнений (4), то есть к определению такого набора значений x_i, для которого максимальный вектор уклонений был бы минимальным.

Контроль нахождения коэффициентов и свободных членов системы (4) может быть выполнен по формулам из [5], которые кратко записываются так:

$$AB=0, \;\; Bl=-W. \tag{5}$$

Приведем пример уравнивания центральной системы (рис. 1) по методу чебышевских приближений. Исходные данные взяты из [1].

Измеренные углы:

1. 106°50′40″,3;	6. 33°40′57″,1;
2. 42°16′38″,6;	7. 28°26′12″,5;
3. 30°52′46″,4;	8. 23°45′11″,9;
4. 20°58′20″,2;	9. 127°48′40″,7.
5. 125°20′36″,8;	

В данной сети возникает пять независимых условных уравнений:

$$\begin{gathered} v_1 + v_2 + v_3 + 5{,}3 = 0;\\ v_4 + v_5 + v_6 - 5{,}9 = 0;\\ v_7 + v_8 + v_9 + 5{,}1 = 0;\\ v_1 + v_5 + v_9 - 2{,}2 = 0;\\ -2{,}32\, v_2 + 3{,}52\, v_3 - 5{,}49\, v_4 + 3{,}15\, v_6 - 3{,}89\, v_7 + 4{,}79\, v_8 - 17{,}9 = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

С помощью пяти шагов жордановых исключений преобразуем их в уравнения поправок:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} -x_1 & -x_2 & & & -5{,}30 = v_1\\ x_1 & & & & = v_2\\ & x_2 & & & = v_3\\ & & x_3 & & = v_4\\ & & -x_3 & -x_4 & +5{,}90 = v_5\\ & & & x_4 & = v_6\\ -0{,}82x_1 & -0{,}15x_2 & -1{,}18x_3 & -0{,}19x_4 & -5{,}76 = v_7\\ -0{,}18x_1 & -0{,}85x_2 & +0{,}18x_3 & -0{,}81x_4 & -0{,}94 = v_8\\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +1{,}60 = v_9 \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Здесь уже все уклонения выражены в функции v_2, v_3, v_4, v_6. Задача уравнивания центральной системы сведена теперь к нахождению чебышевского приближения системы девяти линейных несовместных уравнений поправок (7).

Непосредственное образование системы (7) может быть выполнено по следующим правилам. Первое и пятое уравнение вытекают из условных уравнений I и II треугольников. Свободный член девятого уравнения l_9 равен $l_9 = w_1 + w_2 - w_4$, где w_1, w_2, w_4 — соответственно невязки условных уравнений I и II треугольников и горизонта. Седьмое и восьмое уравнения в общем виде записываются так:

$$\frac{-\Delta_2 - \Delta_8}{k} x_1 + \frac{\Delta_3 - \Delta_8}{k} x_2 + \frac{-\Delta_4 - \Delta_8}{k} x_3 + \frac{\Delta_6 - \Delta_8}{k} x_4 + \frac{w_5 - \Delta_8 w}{k} = v_7,$$

$$\frac{\Delta_2 - \Delta_7}{k} x_1 + \frac{-\Delta_3 - \Delta_7}{k} x_2 + \frac{\Delta_4 - \Delta_7}{k} x_3 + \frac{-\Delta_6 - \Delta_7}{k} x_4 + \frac{-w_5 - \Delta_7 w}{k} = v_8,$$

где Δ_i — изменение $\lg \sin$ при увеличении угла на $1''$; $w_5 = \lg \dfrac{\sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7}$ — невязка полюсного условного уравнения; w — невязка треугольника ABC, а $k = \Delta_7 + \Delta_3$.

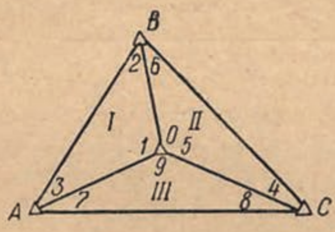

Рис. 1. Центральная система.

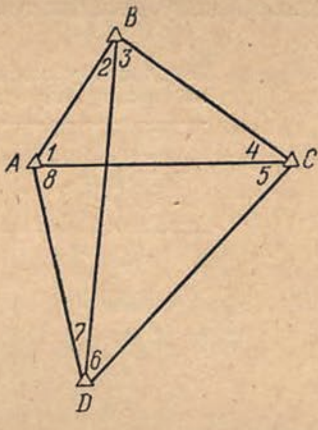

Рис. 2. Геодезический четырехугольник.

Покажем здесь непосредственное образование уравнений поправок для другой типовой фигуры триангуляции — геодезического четырехугольника (рис. 2). Принимая за необходимые неизвестные поправки в первый, второй, третий и восьмой углы получим следующую систему из восьми уравнений поправок:

$$x_1 = v_1$$

$$x_2 = v_2$$

$$x_3 = v_3$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - w_1 = v_4$$

$$\frac{-\Delta_{1+8} - \Delta_{4+5}}{m} x_1 + \frac{\Delta_2 - \Delta_{4+5}}{m} x_2 + \frac{-\Delta_3 - \Delta_{4+5}}{m} x_3 + \frac{\Delta_8 - \Delta_{1+8}}{m} x_4 +$$

$$+ \frac{-w_3 - \Delta_{4+5} w_1}{m} = v_5$$

$$\frac{\Delta_{6+7}-\Delta_1}{n}x_1+\frac{\Delta_{2+3}+\Delta_{6+7}}{n}x_2+\frac{\Delta_{2+3}-\Delta_3}{n}x_3+\frac{\Delta_{6+7}+\Delta_8}{n}x_4+$$

$$+\frac{w_4-\Delta_{6+7}w_2}{n}=v_6$$

$$\begin{array}{llllll} -x_1 & -x_2 & -x_4 & & -w_2 & =v_7 \\ & & x_4 & & & =v_8\ , \quad (8) \end{array}$$

где $m=\Delta_5-\Delta_{4+5}$, $n=\Delta_{6+7}-\Delta_6$; w_1 и w_2 — невязки треугольников ABC и $AB\text{Д}$; $w_3=\lg\dfrac{\sin(1+8)\sin 3\cdot\sin 5}{\sin 2\cdot\sin(4+5)\sin 8}$ — невязка полюсного условного уравнения с полюсом в точке D; $w_4=\lg\dfrac{\sin(2+3)\sin 6\cdot\sin 8}{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin(6+7)}$ — то же с полюсом в точке C.

Решение данной задачи выполнялось «эффективным методом повышающего действия» [4] с применением аппарата линейного программирования. Основу вычислительной схемы данного метода составляют

Результаты уравнивания центральной системы по способу $[vv]=\min$ и $\max|v|=\min$

№ поправок	Поправки	
	$[vv]=\min$	$\max\lvert v\rvert=\min$
v_1	$-0{,}65''$	$+0{,}84''$
v_2	$-3{,}14$	$-3{,}07$
v_3	$-1{,}51$	$-3{,}07$
v_4	$+0{,}03$	$-0{,}25$
v_5	$+3{,}40$	$+3{,}07$
v_6	$+2{,}44$	$+3{,}07$
v_7	$-3{,}48$	$-3{,}07$
v_8	$-1{,}06$	$-0{,}31$
v_9	$-0{,}56$	$-1{,}72$
$[vv]$	$43{,}51$	$50{,}95$

модифицированные жордановы исключения. Искомые значения поправок в измеренные углы приведены в таблице. Здесь же для сравнения показаны поправки, полученные из решения по способу наименьших квадратов.

Отметим, что при уравновешивании по принципу равномерного приближения решаем систему линейных несовместных уравнений поправок, соответствующих методу посредственных измерений в способе наименьших квадратов. При уравновешивании по методу равномерного приближения способ условных измерений теряет свое методологическое значение, ибо он реализуется по тем же вычислительным схемам, что и способ посредственных измерений, кроме того, переход от условных уравнений к уравнениям поправок требует дополнительной вычислительной работы.

Таким образом, при уравновешивании по методу чебышевского приближения для уменьшения объема вычислений имеет определенный смысл взамен составления условных уравнений вычислять соответствующие им уравнения поправок. Непосредственное составление подобных уравнений поправок для различных схем геодезических построений требует специального рассмотрения. Для ряда известных в практике случаев, очевидно, придется воспользоваться имеющимися правилами составления условных уравнений с последующим переходом от них к уравнениям поправок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурмистров Г. А. Задачник по способу наименьших квадратов. М., Геодезиздат, 1960.
2. Иордан В. Руководство по геодезии, т. 1. М., ГУГК, 1939.
3. Гаврилюк В. Т., Ремез Е. Я. О принципе равномерного приближения в применении к обработке результатов измерений, условных в особенности. Киев, Препринт ИМ АН УССР, 1969.
4. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. К., «Наукова думка», 1969.
5. Юршанский З. М. Связь между коэффициентами и свободными членами условных уравнений погрешностей. — «Тр. ЦНИИГАиК», т. 6, Новосибирск, 1954.

Работа поступила 20 мая 1974 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.