УДК 528.14

А. Е. ФИЛИППОВ

О ВЛИЯНИИ ОШИБОК ЗЕНИТНЫХ РАССТОЯНИЙ НА ПЛАНОВЫЕ КООРДИНАТЫ ПУНКТОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

При определении координат B, L, H пунктов триангуляционной сети (рассматриваемой как пространственное построение) из совместной обработки результатов измерений вертикальных и горизонтальных углов или вертикальных углов и наклонных дальностей нет необходимости в редуцировании измеренных элементов на отсчетную поверхность. В связи с этим отпадает, например, вопрос о предварительном вычислении относительных уклонений отвеса, необходимых для строгого вычисления редукций. Точность вычисленных плановых координат B, L в этом случае непосредственно связана как с точностью измеренных горизонтальных углов или наклонных дальностей, так и с точностью измеренных и исправленных за влияние вертикальной рефракции зенитных расстояний. Так как в триангуляции, даже в горных районах, зенитные расстояния в общем близки к 90°, то априорно можно полагать, что при одной и той же точности измерения горизонтальных и вертикальных углов относительное влияние ошибок последних на плановые координаты имеет величину порядка $k\beta_c$, где β_c — выраженный в радианах средний наклон линий к горизонту, а k — коэффициент, зависящий от конфигурации сети, характера и числа избыточных исходных данных количества, измеренных элементов разных видов.

В настоящей статье на примере вытянутого триангуляционного ряда дается приближенная оценка той доли, которую вносят ошибки зенитных расстояний в плановые сдвиги триангуляционных пунктов.

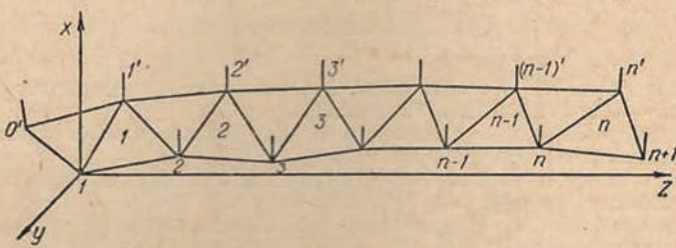

Схема триангуляционного ряда.

Рассмотрим свободный ряд примерно равносторонних треугольников, изображенных на рисунке. В вершинах треугольников измерены горизонтальные углы a_i^{jk} и зенитные расстояния z_{ij}. Путь xyz — система декартовых координат с началом в точке 1. Если направить ось x в астрономический зенит точки 1, то оси y и z будут находиться в плоскости горизонта этой точки. Ось z расположим вдоль диагонали 1, $n+1$ ряда, а ось y направим так, чтобы система была правой. Если ряд имеет относительно небольшую протяженность, то под его продольным и поперечным сдвигом можно понимать сдвиг точки $n+1$ вдоль осей z и y. Численные значения величин этих сдвигов не изменятся, если принять астрономические координаты φ_1, λ_1 и астрономический азимут $\alpha_{1,2}$ направления 1—2 (астрономический азимут диагонали ряда) равными нулю.

Пусть исходными данными триангуляции являются декартовы $x_1=y_1=z_1=0$ и астрономические $\varphi_1=\lambda_1=0$ координаты пункта 1, длина s стороны 1—0′ и ее астрономический азимут $\alpha_{1,0'}$ ($\alpha_{1,0'}\approx 240°$). Предположим, что астрономические координаты и азимуты, а затем декартовы координаты передавались по ходовой линии 1, 2, 3, ..., $n+1$, причем при передаче астрономических координат и азимутов использовались измеренные элементы треугольников, примыкающих к сторонам выбранной ходовой линии. Пренебрегая сферичностью Земли, то есть полагая отвесные линии во всех пунктах параллельными друг другу, получим следующие выражения для составляющих вдоль осей z и y ошибки в положении конечного пункта $n+1$ ряда, как функции ошибок измеренных элементов триангуляции, принимавших участие в передаче координат вдоль выбранной ходовой линии [2]:

$$\delta z_{n+1} = (x_{n+1} - x_2)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_p}\,\delta l_p\right)_1 + (x_{n+1} - x_3)\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial l_p}\,\delta l_p\right)_2 +$$

$$+ \cdots + (x_{n+1} - x_n)\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial l_p}\,\delta l_p\right)_{n-1} + (x_2 - x_1)\,\delta z_{1,2} + (x_3 - x_2)\,\delta z_{2,3} +$$

$$+ \cdots + (x_{n+1} - x_n)\,\delta z_{n,n+1} + (\operatorname{ctg} A_{0'}^{1',1}\,\delta A_{0'}^{1',1} - \operatorname{ctg} A_{1'}^{1,0'}\,\delta A_{1'}^{1,0'})(z_{n+1} - z_1) +$$

$$+ (\operatorname{ctg} A_{1'}^{2,1} \delta A_{1'}^{2,1} - \operatorname{ctg} A_{2}^{1,1'} \delta A_{2}^{1,1'})(z_{n+1} - z_1) +$$
$$+ (\operatorname{ctg} A_{1}^{1',2} \delta A_{1}^{1',2} - \operatorname{ctg} A_{1'}^{2,1} \delta A_{1'}^{2,1})(z_{n+1} - z_2) +$$
$$+ (\operatorname{ctg} A_{1'}^{2',2} \delta A_{1'}^{2',2} - \operatorname{ctg} A_{2'}^{2,1'} \delta A_{2'}^{2,1'})(z_{n+1} - z_2) +$$
$$+ (\operatorname{ctg} A_{2'}^{3,2} \delta A_{2'}^{3,2} - \operatorname{ctg} A_{3}^{2,2'} \delta A_{3}^{2,2'})(z_{n+1} - z_2) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (\operatorname{ctg} A_{n-1}^{(n-1)',n} \delta A_{n-1}^{(n-1)',n} - \operatorname{ctg} A_{(n-1)'}^{n,(n-1)} \delta A_{(n-1)'}^{n,(n-1)})(z_{n+1} - z_n) +$$
$$+ (\operatorname{ctg} A_{(n-1)'}^{n',n} \delta A_{(n-1)'}^{n',n} - \operatorname{ctg} A_{n'}^{n,(n-1)'} \delta A_{n'}^{n,(n-1)'})(z_{n+1} - z_n) +$$
$$+ (\operatorname{ctg} A_{n'}^{n+1,n} \delta A_{n'}^{n+1,n} - \operatorname{ctg} A_{n+1}^{n,n'} \delta A_{n+1}^{n,n'})(z_{n+1} - z_n); \qquad (1)$$

$$\delta y_{n+1} = (z_{n+1} - z_1)(\delta a_1^{0',1'} + \delta a_1^{1',2} + (x_{n+1} - x_2)\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1 +$$
$$+ (z_{n+1} - z_2)\left[\left(\frac{\partial \alpha_{2,1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1 + \delta a_2^{1,1'} + \delta a_2^{1',2'} + \delta a_2^{2',3'}\right] +$$
$$+ (x_{n+1} - x_3)\left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2 + (z_{n+1} - z_3)\left[\left(\frac{\partial \alpha_{3,2}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2 + \delta a_3^{2,2'} + \delta a_3^{2',3'} + \delta a_3^{3',4}\right] +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (x_{n+1} - x_n)\left(\frac{\partial \lambda_n}{\partial l_p}\delta l_p\right)_{n-1} + (z_{n+1} - z_n)\left[\left(\frac{\partial \alpha_{n,n-1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_{n-1} +\right.$$
$$\left. + \delta a_n^{n-1,(n-1)'} + \delta a_n^{(n-1)'n'} + \delta a_n^{n',n+1}\right]. \qquad (2)$$

В выражениях (1) и (2) x_i, y_i, z_i — декартовы координаты вершин ходовой линии; A_i^{jk} — углы между наклонными дальностями; a_i^{jk} — горизонтальные углы; δA_i^{jk}, δa_i^{jk} — ошибки углов A_i^{jk} и a_i^{jk}; δz_{ij} — ошибки зенитных расстояний. Символы $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial l_p}\delta l_p\right)_i$, $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial l_p}\delta l_p\right)_i$, $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial l_p}\delta l_p\right)_i$ означают суммы произведений частных производных от рассматриваемых функций (φ, λ, α) по измеренным элементам треугольника с номером i (зенитным расстояниям и горизонтальным углам) на соответствующие ошибки этих элементов [1].

Ошибки δA_i^{jk} как функции ошибок горизонтальных углов и ошибок зенитных расстяний, определяются формулами

$$\delta A_i^{jk} = \operatorname{cosec} A_i^{jk}(\sin z_{ij}\cos z_{ik} - \cos z_{ij}\sin z_{ik}\cos a_i^{jk})\,\delta z_{ij} +$$
$$+ \operatorname{cosec} A_i^{jk}(\sin z_{ik}\cos z_{ij} - \cos z_{ik}\sin z_{ij}\cos a_i^{kj})\,\delta z_{ik} +$$
$$+ \operatorname{cosec} A_i^{jk}\sin z_{ij}\sin z_{ik}\sin a_i^{jk}\,\delta a_i^{jk} =$$
$$= \operatorname{cosec} A_i^{jk}(n_i^{jk}\delta z_{ij} + n_i^{kj}\delta z_{ik} + \sin z_{ij}\sin_{ik}\sin a_i^{jk}\delta a_i^{jk}). \qquad (3)$$

Формулы (1) и (2) были приведены к виду

$$\delta z_{n+1} = \Sigma c_{ij}\delta z_{ij} + \Sigma d_k^{lm}\delta a_k^{lm};$$
$$\delta y_{n+1} = \Sigma e_{ij}\delta z_{ij} + \Sigma f_k^{lm}\delta a_k^{lm}. \qquad (4)$$

Пусть m_z — средняя квадратическая ошибка исправленного за влияние вертикальной рефракции зенитного расстояния, а m_a — средняя квадратическая ошибка измеренного горизонтального угла. Тогда для среднего продольного M_l и среднего поперечного M_q сдвигов точки $n+1$ относительно точки 1 получим

$$M_l^2 = M_{lz}^2 + M_{la}^2 = m_z^2 \Sigma c_{ij}^2 + m_a^2 \Sigma (d_k^{lm})^2;$$

$$M_q^2 = M_{qz}^2 + M_{qa}^2 = m_z^2 \Sigma e_{ij}^2 + m_a^2 \Sigma (f_k^{lm})^2. \qquad (5)$$

При выводе выражений для коэффициентов c_{ij}, d_k^{lm}, e_{ij}, f_k^{lm} мы отбрасывали члены порядка β^2, где β — выраженный в радианах угол наклона линии к горизонту, и пренебрегали сферичностью Земли. В соответствии с этим было принято

$$A_i^{jk} = a_i^{jk} = 60^\circ,\ \sin z_{ij} = \cos \beta_{ij} = 1,\ \cos z_{ij} = \sin \beta_{ij} = \beta_{ij};$$

$$z_{n+1} - z_1 = ns,\ z_{n+1} - z_2 = (n-1)s \text{ и т. д.};$$

$$x_2 - x_1 = \beta_{1,2}s,\ x_3 - x_2 = \beta_{2,3}s \text{ и т. д.},$$

где n — число сторон ходовой линии.

Некоторые из коэффициентов c_{ij} и e_{ij} представляют собой суммы. После приведения подобных членов все слагаемые этих сумм считались положительными, что преувеличило долю влияния ошибок зенитных расстояний.

При вычислении квадратов величин c_{ij}, d_k^{lm} e_{ij}, f_k^{lm} принято $\beta_{ij} = \beta_c$ и $n_i^{jk} = n_i^{kj} = \beta_c(1 + \cos a) = \frac{3}{2}\beta_c$, где под β_c можно понимать средний по модулю наклон линий к горизонту.

Опуская достаточно громоздкие выкладки, приводим окончательные выражения для величин M_{lz}, M_{la}, M_{qz}, M_{qa}

$$M_{lz}^2 = \frac{1}{3}(14n^3 + 12n^2 + 7n)\beta_c^2 s^2 m_z^2;$$

$$M_{la}^2 = \frac{1}{9}(4n^3 + 3n^2 + 5n)s^2 m_a^2;$$

$$M_{qz}^2 = \frac{1}{9}(40n^3 - 60n^2 + 20n)\beta_c^2 s^2 m_z^2; \qquad (6)$$

$$M_{qa}^2 = \frac{1}{2}(2n^3 + n^2 + n)s^2 m_a^2.$$

Отсюда для средней квадратической ошибки M планового положения конечной точки ряда относительно начальной имеем

$$M^2 = M_a^2 + M_z^2 = \frac{1}{18}(26n^3 + 15n^2 + 19n)s^2 m_a^2 +$$

$$+ \frac{1}{9}(82n^3 - 24n^2 + 41n)\beta_c^2 s^2 m_z^2, \qquad (7)$$

где составляющие $M_a = (M_{la}^2 + M_{qa}^2)^{1/2}$, $M_z = (M_{lz}^2 + M_{qz}^2)^{1/2}$ соответственно обусловлены влиянием ошибок горизонтальных углов и ошибок зенитных расстояний.

Из формулы (7) следует

$$\frac{M_z}{M_a} = \sqrt{\frac{164n^2 - 48n + 82}{26n^2 + 15n + 19}}\,\beta_c \frac{m_z}{m_a}. \qquad (8)$$

Значение квадратного корня в формуле (8) изменяется от 1,8 при $n=1$ до 2,5 при $n \to \infty$. При $2 \leqslant n \leqslant 15$ это значение можно принять равным 2,3, следовательно

$$\frac{M_z}{M_a} = k\beta_c \frac{m_z}{m_a} = 2{,}3\,\beta_c \frac{m_z}{m_a}. \tag{9}$$

Формула (9) позволяет рассчитать для различных значений величины β_c верхние предельные значения отношения m_z/m_a, при которых пренебрегаем влиянием случайных ошибок зенитных расстояний на плановые координаты рассматриваемого триангуляционного ряда, и, наоборот, зная величины m_z/m_a и β_c, оцениваем отношение M_z/M_a.

Например, если принять, что с влиянием ошибок зенитных расстояний можно не считаться при $M_z \leqslant 0{,}1\,M_a$, то

$$\frac{m_z''}{m_a''} \leqslant 2{,}5/\beta_c^0, \tag{10}$$

где β_c^0 — средний наклон линий к горизонту, выраженный в градусах дуги. Как видим, при одинаковой точности измерения горизонтальных и вертикальных углов влияние ошибок зенитных расстояний на плановые координаты пренебрегаемо, если средний наклон линий к горизонту не превышает 2°30′. При $\beta_c \approx 1°15'$ зенитные расстояния можно измерять вдвое грубее, чем горизонтальные углы.

Предположим теперь, что в триангуляции, изображенной на рисунке, измерение горизонтальных углов заменено измерением наклонных дальностей. Выкладки, аналогичные указанным выше (при той же ходовой линии и тех же допущениях), привели к следующему выражению для величины M:

$$M^2 = M_s^2 + M_z^2 = \frac{14\,n^3 + 9\,n^2 + 28\,n}{9}\,m_s^2 + \frac{32\,n^3 + 9\,n^2 + 16\,n}{3}\,\beta_c^2\,s^2\,m_z^2, \tag{11}$$

где M_s и M_z — соответственно средние квадратические ошибки планового положения конечного пункта ряда, обусловленные влиянием ошибок наклонных дальностей и зенитных расстояний; m_s — средняя квадратическая ошибка измерения наклонной дальности. При выводе использовались дифференциальные формулы, рассмотренные в работе [3].

Из формулы (11) для $2 \leqslant n \leqslant 15$ получаем

$$\frac{M_z}{M_s} = 2{,}5\,\beta_c \frac{m_z''}{\rho'' \dfrac{m_s}{s}}. \tag{12}$$

При условии $M_z \leqslant 0{,}1 M_s$ имеем

$$\frac{m_z''}{\rho'' \dfrac{m_s}{s}} \leqslant \frac{2{,}3}{\beta_c^0}. \tag{13}$$

Сопоставление формул (9) и (12) показывает, что в сети равносторонних треугольников с измеренными вертикальными и горизонтальными углами и в сети той же конфигурации, но с измеренными вместо горизонтальных углов наклонными дальностями, относительное влияние ошибок зенитных расстояний на плановые координаты практически одинаково, если одинаковы относительные ошибки горизонтальных углов и наклонных дальностей.

Точность передачи астрономических φ, λ и пространственных x, y, z или B, L, H координат по горизонтальным и вертикальным углам, естественно, зависит от формы треугольников.

Для получения приближенной оценки влияния формы треугольников ряда, изображенного на рисунке, на величину коэффициента k, был выполнен соответствующий расчет. Полагая, что ряд состоит из равнобедренных треугольников с одинаковыми связующими горизонтальными углами a, мы получим следующие результаты:

$$k \approx 2 \text{ при } a = 75° \text{ и } k \approx 5 \text{ при } a = 30°.$$

В работе получена приближенная оценка величины коэффициента k. Она зависит от выбора ходовой линии, так как подсчет выполнялся по неуравненным элементам триангуляции. Тем не менее эта оценка достаточно достоверна, поскольку при выборе другой ходовой линии (для ряда равносторонних треугольников угловой триангуляции), а именно, проходящей через вершины промежуточных углов, мы получили для коэффициента k значение порядка 3,2, то есть незначительно отличающееся от приведенного выше.

Уравнивание вряд ли существенно изменит результат, однако это требует дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1967, вып. 6.
2. Филиппов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной триангуляции. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1968, вып. 7.
3. Филиппов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1969, вып. 9.

Работа поступила 7 июня 1974 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института.