

Я. М. КОСТЕЦКАЯ

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА
РЯДОВ ТРИЛАТЕРАЦИИ

В трилатерационных сетях наиболее простыми фигурами, в которых можно провести контроль полевых измерений, являются центральная система и геодезический четырехугольник. Как следует из [1—5], точность трилатерационного ряда зависит не только от вида и числа фигур, из которых он построен, но и от их формы. Кроме того, ряды из разных фигур позволяют определить координаты пунктов на полосе местности разной ширины с разной плотностью пунктов, т. е. их нельзя считать равноценными. Поэтому сравним в рядах трилатерации равной протяженности, но из разных фигур (см. рисунок), не только точность определения положения наиболее слабого пункта и точность дирекционного угла наиболее удаленной стороны, но и размер территории, покрываемой рядами, число сторон и пунктов в них, а также среднее число k сторон на один пункт. Сравнение этих показателей произведем в рядах из геодезических прямоугольников с продвигом $l=0,8$ и $1,2$, из трехлучевых соприкасающихся центральных систем (см. рисунок, $в$) и из шестилучевых сопряженных (перекрывающихся) центральных систем.

Оценку точности рядов произведем по формулам из [3—5] и выведенным нами. В формулах m — средняя квадратическая ошибка измеренной стороны; l и u — средние квадратические сдвиги, соответственно продольные и поперечные наиболее слабой точки

ряда; N — число фигур (треугольников, четырехугольников и центральных систем) в ряду; m_α — средняя квадратическая ошибка дирекционного угла наиболее удаленной стороны; $l=a/b$, где a — сторона четырехугольника, расположенная вдоль ряда; b — сторона четырехугольника, расположенная поперек него (см. рисунки а, б). Это соотношение называют продвигом четырехугольника.

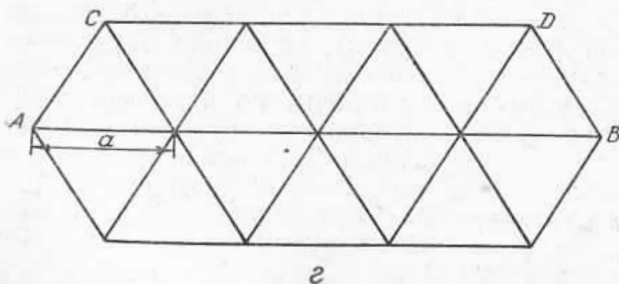
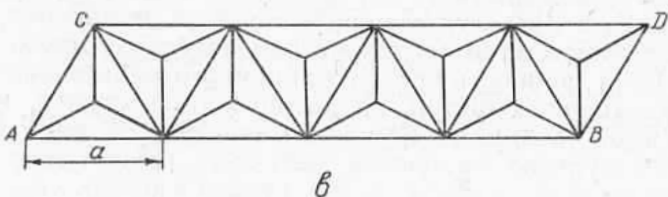
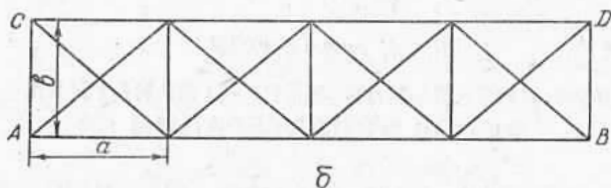
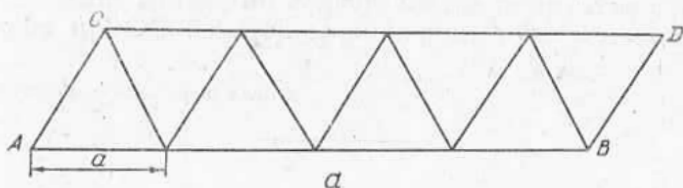
Сравним свободные ряды трилатерации. Для оценки точности рядов из геодезических прямоугольников воспользуемся простыми формулами из [3], полученными путем аппроксимации строгих формул И. А. Кутузова [5]:

$$t(N) = m(0,980 - 0,0381 l) \sqrt{N};$$

$$u(N) = m(0,191 + 0,782/N + 0,806 l N^{3/2});$$

$$m_\alpha = (m/a) \rho \sqrt{2N}.$$

(1)



Схемы рядов трилатерации из: треугольников (а); геодезических четырехугольников (б); соприкасающихся центральных систем (а); сопряженных центральных систем (z).

Средняя погрешность этих формул составляет 5, максимальная — 10%.

Точность свободных рядов из трехлучевых соприкасающихся центральных систем изучена И. А. Кутузовым. Им выведены строгие формулы для рядов из таких трехлучевых систем, в которых стороны по периметру равны между собой и радиальные стороны тоже равны между собой:

$$\begin{aligned} t(N) &= m\sqrt{0,457 N}; \\ u(N) &= m\sqrt{0,8(N/2)^3 - 0,634(N/2)^2 + 0,155(N/2) + 0,82}; \\ m_\alpha &= (m/a)\rho \cdot 1,11\sqrt{N}. \end{aligned} \quad (2)$$

В ряде из сопряженных равносторонних центральных систем оценим положение пункта B и дирекционный угол стороны BD (см. рисунок, 2) по полученным нами строгим формулам

$$\begin{aligned} t(N) &= m\sqrt{0,333 N + 1,49}; \\ u(N) &= m\sqrt{0,2222 N^3 + 1,533 N^2 + 3,24 N + 1,93}; \\ m_\alpha &= (m/a)\rho\sqrt{0,667 N + 3,40}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для сравнения оценим аналогичные элементы ряда трилатерации из равносторонних треугольников по строгим формулам

$$\begin{aligned} t(N) &= m\sqrt{0,5 N}; \\ u(N) &= m\sqrt{0,111 N^3 - 0,083 N^2 + 0,72 N}; \\ m_\alpha &= (m/a)\rho\sqrt{0,333(4 N + 2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Примем, что в рядах из всех фигур длины сторон a (см. рисунок), образующих диагональ (замыкающую) AB , одинаковы и равны 1 км. При этом, как видно из рисунка, число фигур N в рядах равной протяженности разное. Так, в ряде длиной 4 км из треугольников и соприкасающихся центральных систем $N=8$, из геодезических четырехугольников $N=4$, а из сопряженных центральных систем $N=3$.

По формулам (1) — (4) проведем оценку точности рядов длиной 4 и 8 км. При этом будем считать, что средняя квадратическая ошибка измеренной стороны $m=1$ см, а относительная погрешность сторон $m/a=1:100\,000$. Результаты вычислений по формулам сведены в табл. 1. В ней даны также соотношение сдвигов u/t , ширина ряда, число пунктов и сторон и среднее число k сторон на один пункт.

Полученные результаты показывают, что в рядах из малого числа фигур существенных различий в точности определения положения пунктов и дирекционных углов нет. Но с увеличением числа фигур наиболее точными являются ряды из сопряженных

центральных систем. В ряде из восьми геодезических четырехугольников с продвигом 0,8 поперечный сдвиг и ошибка дирекционного угла больше примерно на 30%, чем в ряде равной длины из сопряженных центральных систем. С увеличением продвига ошибки элементов ряда растут. Следовательно, в рядах трилатерации необходимо применять или геодезические четырехугольники с продвигом, меньше 1, или ряды из сопряженных центральных

Таблица 1

Сравнение свободных рядов трилатерации ($m=1$ см, $a=1$ км)

Показатель	Ряды трилатерации				
	из трех- угольников	из геодезичес- ких четырех- угольников с $l=0,8$	из геодезичес- ких четырех- угольников с $l=1,2$	из сопряжа- ющихся центральных систем	из сопряжен- ных центральных систем
Длина ряда 4 км					
N	8	4	4	8	3
t , см	2,0	1,9	1,9	1,9	1,6
u , см	7,6	5,2	7,2	6,5	5,6
u/t	3,8	2,7	4,0	3,4	3,5
$m_a, \dots$	6,7	5,8	5,8	6,5	4,8
Ширина ря- да, км	0,87	1,25	0,83	0,87	1,74
Число пунктов	10	10	10	18	13
Число сторон	17	21	21	41	26
k	1,7	2,1	2,1	2,3	2,0
Длина ряда 8 км					
N	16	8	8	16	6
t , см	2,8	2,7	2,6	2,7	1,9
u , см	21,1	14,7	22,0	19,3	11,2
u/t	7,5	5,4	8,5	7,2	5,9
$m_a, \dots$	9,7	8,2	8,2	9,1	5,6
Ширина ря- да, км	0,87	1,25	0,83	0,87	1,74
Число пунктов	18	18	18	34	22
Число сторон	33	41	41	81	47
k	1,8	2,3	2,3	2,4	2,1

систем. В первом случае определяем меньшее число пунктов на более узкой полосе местности, чем во втором.

Если на узкой полосе местности необходимо определить большое число пунктов, то в этом случае можно использовать ряды из трехлучевых центральных систем. Но точность их ниже точности рядов из сопряженных центральных систем. Точность рядов из трехлучевых центральных систем близка к точности рядов равной протяженности из центральных систем только в том случае, когда длины радиальных сторон трехлучевых систем равны длинам сторон шестилучевых центральных систем.

Во всех рядах трилатерации поперечные сдвиги в несколько раз больше продольных.

Наибольшее число сторон на один пункт приходится в ряде из соприкасающихся центральных систем, а наименьшее — в ряде из треугольников. На втором месте по этому показателю находится ряд из сопряженных центральных систем.

Рассмотрим, как на точность определения положения пунктов в рядах трилатерации влияют дирекционные углы крайних сторон, т. е. оценим ряды трилатерации, в которых дирекционные углы сторон AC и BD (см. рисунок) — исходные. Сдвиги точки B относительно точки A в ряде из треугольников определим по формулам

$$t(N) = m\sqrt{0,25 N + 0,125};$$

$$u(N) = m\sqrt{0,02778 N^3 + 0,0417 N^2 + 0,0972 N - 0,291}. \quad (5)$$

Для определения сдвигов точки B в рядах из геодезических прямоугольников тоже воспользуемся формулами из [3]:

$$t(N) = m(0,688 - 0,0576 l)\sqrt{N};$$

$$u(N) = m(0,743 - 0,0174 N + 0,410 lN)\sqrt{N}. \quad (6)$$

А сдвиги точки B в ряде из сопряженных центральных систем определим по нашим формулам

$$t(N) = m\sqrt{(1/3)N + 1,49 - 6/(N + 5,1)};$$

$$u(N) = m\sqrt{-0,0849 N^3 + 2,60 N^2 - 3,73 N + 8,0}. \quad (7)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2. В скобках показано, на сколько процентов уменьшился сдвиг по сравнению

Таблица 2

Сравнение рядов трилатерации,
построенных между исходными дирекционными углами
 $m=1$ см, $a=1$ км

Показатель	Ряды трилатерации			
	из геодезических треугольников	из геодезических четырехугольников с $l=0,8$	из геодезических четырехугольников с $l=1,2$	из сопряженных центральных систем
Длина ряда 4 км				
N	8	4	4	3
t , см	1,4(30)	1,3(32)	1,2(37)	1,3(19)
u , см	4,9(36)	4,0(27)	5,3(31)	4,2(25)
u/t	3,5	3,1	4,4	3,2
Длина ряда 8 км				
N	16	8	8	6
t , см	2,0(29)	1,8(33)	1,8(31)	1,7(11)
u , см	11,8(44)	9,1(38)	12,8(42)	8,5(24)
u/t	5,9	5,1	7,1	5,0

с соответствующим свободным рядом. Как видим, исходные дирекционные ряды наиболее существенно повышают точность рядов из треугольников и из четырехугольников с продвигом 1,2. Наиболее слабое их влияние на точность положения пунктов в рядах из сопряженных центральных систем. При наличии исходных дирекционных углов поперечные сдвиги пунктов тоже в несколько раз больше продольных.

Теперь рассмотрим ряды, в которых пункты A, B, C и D — исходные. Наиболее слабые элементы в этом случае будут расположены в середине рядов. Сдвиги наиболее слабой точки и ошибку дирекционного угла стороны, расположенной в середине ряда из треугольников, найдем по формулам

$$\begin{aligned} t(K) &= m\sqrt{0,075 N + 0,18}; \\ u(K) &= m\sqrt{0,16 N^2 - 0,44 N + 2,84}; \\ m_{\alpha} &= (m/a) \rho \sqrt{0,2 N - 2,8}. \end{aligned} \quad (8)$$

Точность этих же элементов в рядах из геодезических четырехугольников определим так:

$$\begin{aligned} t(K) &= m [0,475 + 0,0520 N + (0,093 N - 0,101)/N]; \\ u(K) &= m (0,502 - 0,00369 N + 0,118 \ln \sqrt{N}); \\ m_{\alpha} &= (m/a) \rho [0,626 + 0,0489 N + (0,116 - 0,0357 N)/l]. \end{aligned} \quad (9)$$

Ряд из сопряженных центральных систем оценим по формулам

$$\begin{aligned} t(K) &= m \sqrt{0,09 N + 0,42}; \quad u(K) = m \sqrt{0,0883 N^2 + 0,11 N + 0,615}; \\ m_{\alpha} &= (m/a) \rho \sqrt{-0,035 N^2 + 0,42 N + 0,065}. \end{aligned} \quad (10)$$

По этим формулам оценим ряды протяженностью 4 и 8 км. Как видим из данных табл. 3, исходные пункты существенно повышают качество трилатерационных рядов. Ошибки элементов ряда уменьшаются в 3...4 раза. Значительно сближаются значения продольных и поперечных сдвигов. Точность положения пунктов в рядах из сопряженных центральных систем и из геодезических четырехугольников с продвигом 0,8 примерно одинакова. А точность дирекционных углов в рядах из геодезических четырехугольников на 25...30% выше, чем в рядах из центральных систем. С увеличением продвига четырехугольников поперечные сдвиги наиболее слабых пунктов возрастают. При продвиге 1,2 поперечные сдвиги пунктов на 20...40% больше, чем в ряде из центральных систем.

Данные табл. 1, 2, 3 соответствуют рядам трилатерации с любыми длинами сторон, но с замыкающими, состоящими из четырех и восьми сторон.

Сдвиги соответствуют средней квадратической ошибке измеренных сторон, равной 1 см, а средние квадратические ошибки дирекционных углов — относительной ошибке сторон 1:100 000.

При другой точности измерения линий сдвиги в таблицах нужно умножить на среднюю квадратическую ошибку стороны, а ошибку дирекционных углов — на коэффициент $100\,000/M$, где M — знаменатель относительной ошибки сторон. Таким образом, все выводы, сделанные для рядов со сторонами $a=1$ км, действительны для рядов с любыми длинами сторон и любой точностью их измерения.

Анализ формул (1), (6) и (9) показывает, что продвиг фигур действует наиболее чувствительно на поперечный сдвиг пунктов

Таблица 3

Сравнение рядов трилатерации, построенных между четырьмя исходными пунктами $m=1$ см, $a=1$ км

Показатель	Ряды трилатерации			
	из тре- угольников	из геодезичес- ких четырех- угольников с $l=0,8$	из геодезичес- ких четырех- угольников с $l=1,2$	из сопряжен- ных централь- ных систем
Длина ряда 4 км				
N	8	4	4	3
t , см	0,9(55)	0,8(58)	0,7(63)	0,8(50)
u , см	3,1(59)	1,2(78)	1,6(79)	1,3(77)
u/t	3,4	1,5	2,3	1,6
$m_a, \dots$	3,9(42)	1,6(72)	1,6(72)	2,1(56)
Длина ряда 8 км				
N	16	8	8	6
t , см	1,2(57)	1,0(63)	1,0(62)	1,0(53)
u , см	6,1(71)	2,6(82)	3,7(83)	2,1(81)
u/t	5,1	2,6	3,7	2,1
$m_a, \dots$	5,0(48)	1,7(79)	1,8(78)	2,4(57)

рядов трилатерации из геодезических прямоугольников. При этом его действие на сдвиг быстро увеличивается с ростом числа фигур в ряде (пропорционально $N^{3/2}$). В ряде с постоянным числом фигур поперечный сдвиг, как и другие показатели точности, прямо пропорционален значению продвига. Поэтому очевидно, что при продвигах меньше 0,8 погрешности рядов из четырех и восьми геодезических прямоугольников будут меньше указанных в табл. 1, 2, 3 и соответственно при продвигах больше 1,2 они будут больше. Отсюда следует, что точность рядов из геодезических прямоугольников только при продвигах 0,8 и меньше равна точности рядов из сопряженных центральных систем.

Во всех рядах трилатерации сдвиги и ошибки дирекционных углов быстро увеличиваются с ростом числа фигур в ряде. Но не трудно проверить, что при замыкающих, состоящих из числа сторон не более четырех, точность элементов всех рядов практически равна за исключением рядов из геодезических прямоугольников с продвигом больше 1. Скорость увеличения сдвигов при

дальнейшем увеличении числа сторон, составляющих замыкающую, наименьшая в рядах из сопряженных центральных систем. Поэтому при создании рядов с числом сторон, составляющих замыкающую, больше 4, предпочтение следует отдать этим рядам.

Формулы (3), (7) и (10) публикуются впервые. При этом формулы (3) — строгие, а (7) и (10) получены путем упрощения строгих, но громоздких формул. При $N < 11$ точность их 1...3%.

Список литературы: 1. Аркашова У. П. Оценка точности рядов прямоугольников с измеренными сторонами и диагоналями. — Науч. тр. ОМСХИ, 1970, № 2. 2. Бронштейн Г. С. К вопросу об оценке точности ряда трилатерации. — Инж.-строит. изыскания, 1974, № 1(34). 3. Бронштейн Г. С., Сафонов А. С. Аппроксимация формул для оценки точности ряда трилатерации. — Геодезия и картография, 1974, № 1. 4. Костецкая Я. М. К вопросу оценки точности сплошных сетей трилатерации. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1967, вып. 6. 5. Кутузов И. А. Накопление погрешностей в рядах трилатерации с измеренными сторонами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1957, вып. 2.

Статья поступила в редколлегию 14.02.84