Параметрами точечно-дипольной модели (6) являются $p+$[illegible] точечных масс, r дипольных моментов и $2(p+q+r)$ координа[illegible] точек Q... экваториального сечения планеты. Если эти параметр[illegible] известны, то (6) позволяет просто вычислять как потенциал, та[illegible] и его производные в любой внешней точке P. Использование это[illegible] формулы взамен формул, представляющих многоточечную аппрок[illegible]симацию потенциала, приведет к некоторому усложнению рабо[illegible]ты — дополнительному вычислению слагаемых третьей («диполь[illegible]ной») суммы, но это окупится уточнением модели, обусловленны[illegible] именно введением такой суммы, и упрощением процедуры опре[illegible]деления параметров модели. А последнее является следствием, [illegible] одной стороны, уменьшения (от трех до двух) числа искомых коор[illegible]динат каждой точки, несущей точечный объект модели, а с дру[illegible]гой — возможностью разбиения системы уравнений для определе[illegible]ния параметров модели (6) на три независимых системы, кажда[illegible] из которых соответствует одному из гравитирующих дисков: ФД[illegible] МД, ДД. Подчеркнем, что любая такая система, нелинейная [illegible] целом относительно параметров модели, но линейная по «обиль[illegible]ностям» точечных объектов (m_i, m_j или d_k), допускает удачно[illegible] начальное приближение при назначении координатам точек Q[illegible] (несущих массы или дипольные моменты), таких значений, кото[illegible]рые приписывают узлам кубатурных формул для круга с наивыс[illegible]шей алгебраической степенью точности.

При создании конкретных вариантов точечно-дипольных моде[illegible]лей геопотенциала естественно использование уже накопленного большого опыта построения его многоточечных моделей и уже разработанных эффективных его методик [3, 6] с внесением в них обсужденных здесь корректив.

Список литературы: 1. Изучение Земли как планеты методами астрономии[illegible] геодезии и геофизики. — К.: Наук. думка, 1982. 2. Использование искусствен[illegible]ных спутников в геодезии. — М.: Мир, 1975. 3. *Марченко А. Н.* Вариационный метод аппроксимации геопотенциала рядом фундаментальных решений уравне[illegible]ния Лапласа. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1985, вып. 41. 4. *Ме[illegible]щеряков Г. А.* О представлении потенциала планеты суммой потенциалов плоских слоев. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 40. 5. *Мещеря[illegible]ков Г. А.* О представлении потенциала планеты суммой потенциалов дву[illegible] простых слоев. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 39[illegible] 6. Proc. Int. Symp. Figure of the Earth, the Moon and other Planets: Monograph Series of VÚGTK. Prague, 1983.

Статья поступила в редколлегию 21. 02. [illegible]

УДК 528.35

В. В. НИКИФОРОВ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СПЕЦИАЛЬНОЙ СЕТИ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Создание новых точных светодальномеров обусловило широкое применение метода трилатерации для создания планового обоснования.

Требования к специальным сетям следующие [2]: геодезические пункты должны располагаться в наиболее удобных местах для их использования; удовлетворять необходимую точность; геодезические пункты должны обеспечивать плановыми координатами определенную полосу территории в целях топографической съемки; полевые работы выполнять в кратчайшие сроки.

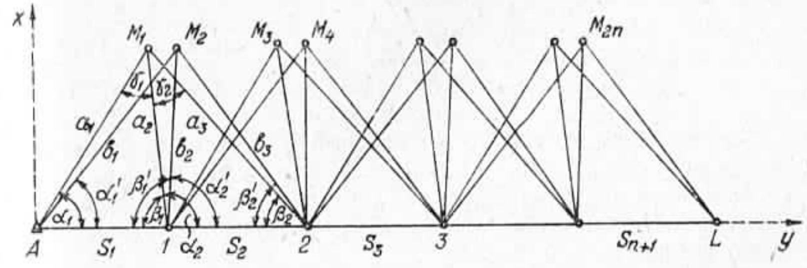

Схема сети трилатерации.

Построение сети трилатерации в виде цепочки треугольников не всегда удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Поэтому можно создавать сети из пучков треугольников, которые лучше удовлетворяют требованиям, предъявляемым к специальным сетям (см. рисунок).

Метод трилатерации позволяет строить сети разнообразных систем, с различным количеством направлений на вспомогательные точки M_1, M_2, ..., M_{2n}, образующие пучки треугольников, исходящие из одной точки. Каждое из этих построений образует своеобразную сеть, которую можно приспособить к различным задачам и условиям. Для данных сетей характерно, что светодальномер устанавливают только в точках ходовой линии AL. На вспомогательных точках M_1, M_2, ..., M_{2n} помещают отражатели.

Ходовую линию выбирают по наивыгоднейшим направлениям в отношении целевого назначения сети, а также в физико-географическом и транспортном отношениях. Длины сторон ходовой линии зависят от назначения сети и необходимой точности. Пункты ходовой линии располагают в местах, выгодных для их дальнейшего использования, с учетом обеспечения видимости между пунктами.

Вспомогательные точки могут быть по обе стороны ходовой линии и могут находиться по одну сторону от нее. Во втором случае уменьшается лишь ширина полосы, обеспечиваемая пунктами вдоль маршрута. Кроме того, наличие вспомогательных точек позволяет повысить точность сети.

Выведем формулы для предрасчета точности свободных сетей трилатерации, состоящих из пучков треугольников.

Средние квадратические ошибки функции уравновешенных элементов геодезической сети вычисляем по формуле

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}, \tag{1}$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса; $\frac{1}{P_F}$ — обратный вес функции;

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \dots - \frac{[kf(n-1)]^2}{[kk(n-1)]}. \tag{2}$$

Здесь f — частные производные весовой функции; a, b, k — коэффициенты условных уравнений; n — число условных уравнений.

В свободной сети трилатерации (см. рисунок) возникают условные уравнения в каждом пучке треугольников, так как в нем есть одно избыточное измерение.

В угловой форме условное уравнение будет

$$(\beta_1) + (\alpha_2) - (\beta_1') - (\alpha_2') + W = 0;$$
$$W = \beta_1 + \alpha_2 - \beta_1' - \alpha_2', \tag{3}$$

где β_1, α_2, β_1', α_2' — вычисленные углы; (β_1), (α_2), (β_1'), (α_2') — вероятнейшие поправки в вычисленные углы.

Заменим поправки в углы поправками в длины сторон. Связь между поправками в углы и поправками сторон выражается формулами [1]

$$(\beta_1) = \frac{\rho''}{h_1}[(a_1) - \cos\alpha_1 (s_1) - \cos\gamma_1 (a_2)];$$

$$(\alpha_2) = \frac{\rho''}{h_2}[(a_3) - \cos\beta_2 (s_2) - \cos\gamma_2 (a_2)];$$

$$(\beta_1') = \frac{\rho''}{h_1'}[(b_1) - \cos\alpha_1' (s_1) - \cos\gamma_1' (b_2)];$$

$$(\alpha_2') = \frac{\rho''}{h_2'}[(b_3) - \cos\beta_2' (s_1) - \cos\gamma_2' (b_2)], \tag{4}$$

где h_i, h_i' — высота треугольника, опущенная на противолежащую сторону из вершины угла, поправка которого определяется; (a_i), (b_i), (s_i) — поправки в длины сторон.

Подставляя (4) в (3), получаем условное уравнение в окончательном виде:

$$\frac{1}{h_1}(a_1) - \frac{1}{h_1'}(b_1) + \frac{1}{h_2}(a_3) - \frac{1}{h_2'}(b_3) + \left(\frac{\cos\alpha_1'}{h_1'} - \frac{\cos\alpha_1}{h_1}\right)(s_1) +$$
$$+ \left(\frac{\cos\beta_2'}{h_2'} - \frac{\cos\beta_2}{h_2}\right)(s_2) - \left(\frac{\cos\gamma_1}{h_1} + \frac{\cos\gamma_2}{h_2}\right)(a_2) +$$
$$+ \left(\frac{\cos\gamma_1'}{h_1'} + \frac{\cos\gamma_2'}{h_2'}\right)(b_2) + \frac{1}{\rho''} W = 0. \tag{5}$$

Число условных уравнений можно вычислить по формуле

$$Q = P - 2N + 3, \tag{6}$$

где P — число всех сторон; N — число всех пунктов сети.

Продольный сдвиг ряда. Весовая функция будет иметь вид

$$f_u = \sum_{i=2}^{n+1} (s_i), \tag{7}$$

где n — число пучков.

Для вывода формулы находим закономерности образования квадратичных и неквадратичных коэффициентов в (2). Неквадратичные коэффициенты запишем таким образом:

$$[aa] = [bb] = [cc] = \cdots, \quad [ab] = [bc] = [cd] = \cdots;$$
$$[ac] = [ad] = [bd] = \cdots = 0;$$

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} = [aa]\left(1 - \frac{[ab]^2}{[aa]}\right) = [aa](1 - q^2);$$

$$[cc \cdot 2] = [aa]\left(1 - \frac{[ab]^2}{[aa]^2}\frac{1}{1 - \frac{[ab]^2}{[aa]^2}}\right) = [aa]\left(\frac{1 - 2q^2}{1 - q^2}\right);$$

$$[dd \cdot 3] = [aa]\left(1 - \frac{[ab]^2}{[aa]^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{[ab]^2}{[aa]^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{[ab]^2}{[aa]^2}}}\right) =$$
$$= [aa]\left(\frac{1 - 2q^2}{1 - q^2}\right);$$

. . . .

$$[kk(n-1)] = [aa]\left(1 - \frac{[ab]^2}{[aa]^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{[ab]^2}{[aa]^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{[ab]^2}{[aa]^2} \cdot \frac{1}{1 - \dots}}}\right) =$$
$$= [aa]\left(\frac{1 - 2q^2}{1 - q^2}\right).$$

Так как $q=\frac{[ab]}{[aa]}$ меньше единицы, то значение дроби

$$x\left\{1-q^2\frac{1}{1-q^2}\,\frac{1}{1-q^2}\,\frac{1}{1-q^2}\cdots\cdots\right\}$$

с точностью малой величины второго порядка можно принять равным

$$x\left\{1-\frac{q^2}{1-q^2}\right\}.$$

Квадратичные коэффициенты имеют вид

$$[ff]=n+1;$$

$$[af]=[bf]=[cf]=\cdots=[nf];$$

$$[bf\cdot 1]=[af](1-q);$$

$$[cf\cdot 2]=[af]\left\{1-\frac{q}{1-q^2}(1-q)\right\}=[af]\left(\frac{1-q}{1-q^2}\right);$$

$$[af\cdot 3]=[af]\left\{1-\frac{q(1-q^2)}{1-2q^2}\left[1-\frac{q}{1-q^2}(1-q)\right]\right\}=$$

$$=[af]\left(\frac{1-2q^2}{1+q-2q^2-q^3}\right);$$

$$[ef\cdot 4]=[af]\left\{1-\frac{q(1-q^2)}{1-2q}\left[1-\frac{q(1-q^2)}{1-2q^2}\left(1-\frac{q(1-|q)}{1-q^2}\right)\right]\right\}=$$

$$=[af]\left(\frac{1-2q^2}{1+q-2q^2-q^3}\right);$$

. . . .

$$[kf(n-1)]=[af]\left(\frac{1-2q^2}{1+q-2q^2-q^3}\right),$$

так как произведения можно выразить геометрическим рядом

$$x\{1-t(1-t(1-t\cdots)\}=x(1-t+t^2-t^3+t^4-\cdots)=x\cdot\frac{1}{1+t},$$

где

$$t=\frac{q(1-q^2)}{1-2q}.$$

Подставив значения коэффициентов в (2), получим

$$\frac{1}{P_u}=(n+1)-\frac{\sigma^2}{z}\left\{1+\frac{(1-q)^2}{1-q^2}+\frac{1-q^2}{1-2q^2}\left[\left(\frac{1-q}{1-q^2}\right)^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{1-2q^2}{1+q-2q^2-q^2}\right)\right](n-2)\right\},$$

где

$$\sigma=\left(\frac{\cos\alpha_1'}{h_1'}-\frac{\cos\alpha_1}{h_1}\right)+\left(\frac{\cos\beta_2'}{h_2'}-\frac{\cos\beta_2}{h_2}\right);$$

$$z=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h_1'^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_2'^2}+\left(\frac{\cos\gamma_1}{h_1}+\frac{\cos\gamma_2}{h_2}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma_1'}{h_1'}+\frac{\cos\gamma_2'}{h_2'}\right)^2. \quad (8)$$

По (8) вычисляем значение $1/P_u$ для сети, составленной из пучков треугольников.

Однако формула (8) громоздка и неудобна для вычислений. Получим $1/P_u$ для случая, когда ряд состоит из типовых пучков треугольников и расстояние между вспомогательными точками M_1 и M_2 менее 10 м. В этом случае $\alpha_1'\approx\alpha_1$, $\beta_2'\approx\beta_2$, $[ab]=[bc]=$ $=\ldots=0$, $q=0$, $\left(\frac{\cos\alpha_1'}{h_1'}-\frac{\cos\alpha_1}{h_1}\right)\approx 0$, $\left(\frac{\cos\beta_2'}{h_2'}-\frac{\cos\beta_2}{h_2}\right)\approx 0$, $\sigma=0$.

Тогда (8) примет вид

$$1/P_u=n+1,\quad m_u=\mu\sqrt{n+1}. \quad (9)$$

Поперечный сдвиг ряда и средняя квадратическая ошибка дирекционного угла стороны s_{n+1}. Весовые функции соответственно будут иметь вид

$$f_t=s\left\{-(k-1)\left[\frac{1}{h_1}(a_1)+\frac{1}{h_2}(a_3)-\left(\frac{1}{h_1}\cos\gamma_1+\frac{1}{h_2}\cos\gamma_2\right)(a_2)\right]-\right.$$

$$-(k-2)\left[\frac{1}{h_3}(a_4)+\frac{1}{h_4}(a_6)-\left(\frac{1}{h_3}\cos\gamma_3+\frac{1}{h_4}\cos\gamma_4\right)(a_5)\right]-$$

$$-(k-3)\left[\frac{1}{h_5}(a_7)+\frac{1}{h_6}(a_9)-\left(\frac{1}{h_5}\cos\gamma_5+\frac{1}{h_6}\cos\gamma_6\right)(a_8)\right]-$$

$$-\cdots+(k-1)\frac{\cos\alpha_1}{h_1}(s_1)+\left[\frac{(k-1)\cos\beta_2}{h_2}+\frac{(k-2)\cos\alpha_3}{h_3}\right](s_2)+$$

$$+\left[\frac{(k-2)\cos\beta_4}{h_4}+\frac{(k-3)\cos\alpha_5}{h_5}\right](s_3)+\cdots\frac{\cos\beta_{2n}}{h_{2n}}(s_{n+1});$$

$$f_\alpha=\rho''\left\{\frac{1}{h_1}(a_1)+\frac{1}{h_2}(a_3)+\frac{1}{h_3}(a_4)+\frac{1}{h_4}(a_6)+\cdots-\right.$$

$$-\left(\frac{\cos\gamma_1}{h_1}+\frac{\cos\gamma_2}{h_2}\right)(a_2)-\left(\frac{\cos\gamma_3}{h_3}+\frac{\cos\gamma_4}{h_4}\right)(a_5)-\left(\frac{\cos\gamma_5}{h_5}\frac{\cos\gamma_6}{h_6}\right)(a_8)-$$

$$-\cdots-\frac{\cos\alpha_1}{h_1}(s_1)-\left(\frac{\cos\beta_2}{h_2}+\frac{\cos\alpha_3}{h_3}\right)(s_2)-$$

$$-\left(\frac{\cos\beta_4}{h_4}+\frac{\cos\alpha_5}{h_5}\right)(s_3)-\cdots-\frac{\cos\beta_{n+3}}{h_{n+3}}(s_{n+1}).$$

Находя закономерности в образовании квадратичных и неквадратичных коэффициентов, получаем формулы для оценки точности

$$\frac{1}{P_t} = \frac{s^2}{h^2}\left\{\frac{1}{6}k(k-1)(2k-1)(1+2\cos^2\gamma) + [(2k-2)^3 - \right.$$

$$\left. -2k-4]\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\right\} = \frac{s^2}{h^2}\cdot A; \tag{10}$$

$$\frac{1}{P_\alpha} = \frac{\rho''^2}{h^2}[(1+2\cos^2\gamma+4\cos^2\alpha)n - 3\cos^2\alpha] = \frac{\rho''^2}{h^2}\cdot B;$$

$$m_t = \mu\frac{s}{h}\sqrt{A}\,; \quad m_\alpha = \mu\frac{\rho''}{h}\sqrt{B}\,. \tag{11}$$

Проверка формул на ЭВМ

Номер проверки	$1/P_u$ по формуле	$1/P_u$ ЭВМ	Ошибка, %	$1/P_t$ по формуле	$1/P_t$ ЭВМ	Ошибка, %	$1/P_\alpha \cdot h^2/\rho''^2$ по формуле	$1/P_\alpha \cdot h^2/\rho''^2$ ЭВМ	Ошибка, %
Модель 1 ($s_i=1000$ м, $\alpha\approx\beta\approx 26°40'$)									
3	1,00	1,00	0	2,18	2,17	0,5	2,20	2,21	0,4
4	2,00	2,00	0	15,00	15,07	0,5	6,80	6,88	1,2
5	3,00	3,00	0	47,61	48,94	2,7	11,40	11,60	1,7
6	4,00	4,00	0	109,22	111,94	2,4	16,01	16,29	1,7
7	5,00	5,00	0	209,05	214,37	2,5	20,61	20,96	1,7
8	6,00	6,00	0	358,71	365,14	1,8	25,21	25,58	1,4
9	7,00	7,00	0	562,85	574,64	2,0	29,81	30,16	1,2
10	8,00	8,00	0	829,87	849,77	2,3	34,41	34,74	0,9
Модель 2 ($s_i=1000$ м, $\alpha\approx\beta\approx 45°$)									
3	1,00	1,00	0	2,49	2,42	3,0	2,50	2,52	0,8
4	2,00	2,00	0	14,94	15,13	1,2	6,50	6,59	1,4
5	3,00	3,00	0	45,34	45,09	1,6	10,50	10,67	1,6
6	4,00	4,00	0	101,65	103,71	2,0	14,50	14,77	1,8
7	5,00	5,00	0	191,86	196,04	2,1	18,50	18,83	1,8
8	6,00	6,00	0	325,44	330,34	1,5	22,50	22,87	1,6
9	7,00	7,00	0	505,88	518,52	2,4	26,50	26,86	1,3
10	8,00	8,00	0	745,63	760,72	2,0	30,50	30,88	1,2

Проверку формул (9), (10), (11) выполняли на аналогичных моделях путем решения системы нормальных уравнений на ЭВМ ЕС-1030. Результаты приведены в таблице.

Из приведенных результатов вычислений видно, что полученные формулы позволяют вычислять $1/P_{u,\,t,\,\alpha}$ с погрешностью 3%.

Список литературы: 1. *Вировец А. М.* Высшая геодезия. — М.: Недра, 1970, ч. 1. 2. *Дурнев А. И.* Новые системы построения геодезических сетей. — М.: Геодезиздат, 1952.

Статья поступила в редколлегию 20. 04 84

УДК 528.3

А. Л. ОСТРОВСКИЙ, А. П. ВАРЕНИЦА, Н. Г. КРАВЕЦ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕРТИКАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ ОТ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ И АБСОЛЮТНЫХ ВЫСОТ В ГОРНЫХ УСЛОВИЯХ

Зависимость коэффициентов вертикальной рефракции от эквивалентных высот в равнинных и всхолмленных районах хорошо исследована [2].

Несколько иначе обстоит дело с изучением этого вопроса в горных районах. На основании [1, 4] можно утверждать, что коэффициент рефракции уменьшается с увеличением абсолютных высот луча над уровнем моря. Однако кроме фактора абсолютной высоты на коэффициент рефракции действует эквивалентная высота. Поэтому в горных условиях актуален вопрос о взаимодействии двух факторов: эквивалентной и абсолютной высот луча.

Днем при малых эквивалентных высотах луча имеют место небольшие положительные или даже отрицательные рефракции, обусловленные сверхадиабатическими градиентами температуры. С ростом высоты луча над подстилающей поверхностью вертикальные градиенты температуры уменьшаются. Следовательно, должно наблюдаться увеличение коэффициентов рефракции. Далее при значительных эквивалентных высотах вертикальные градиенты температуры стабилизируются, приближаются к 0.65 К на 100 м. Такие градиенты характерны для свободной атмосферы. Зависимость коэффициентов рефракции от эквивалентной высоты постепенно ослабляется.

При дальнейшем поднятии луч попадает в более однородные по вертикали слои, кривизна его уменьшается, радиус растет, в связи с этим коэффициент рефракции должен уменьшаться. Таковы априорные предположения, требующие подтверждения и уточнения.

Цель статьи — на основании теоретических предпосылок и экспериментальных данных установить закономерность изменения коэффициентов рефракции при изменении эквивалентных высот от 10...20 до нескольких сотен метров; взаимодействие в условиях горного района двух факторов: эквивалентной и абсолютной высот.

Рассмотрим вначале теоретические предпосылки.

Как известно, пренебрегая действием влажности, показатель преломления воздуха n для оптического излучения белого цвета можно представить формулой

$$n - 1 = 78{,}85\frac{B}{T}\cdot 10^{-6}, \tag{1}$$

где B — давление, гПа; T — абсолютная температура воздуха.