УДК 528.35

В. В. НИКИФОРОВ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СПЕЦИАЛЬНОЙ СЕТИ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Создание новых точных светодальномеров обусловило широкое применение метода трилатерации для создания планового обоснования.

Требования к специальным сетям следующие [2]: геодезические пункты должны располагаться в наиболее удобных местах для их использования; удовлетворять необходимую точность; геодезические пункты должны обеспечивать плановыми координатами определенную полосу территории в целях топографической съемки; полевые работы выполнять в кратчайшие сроки.

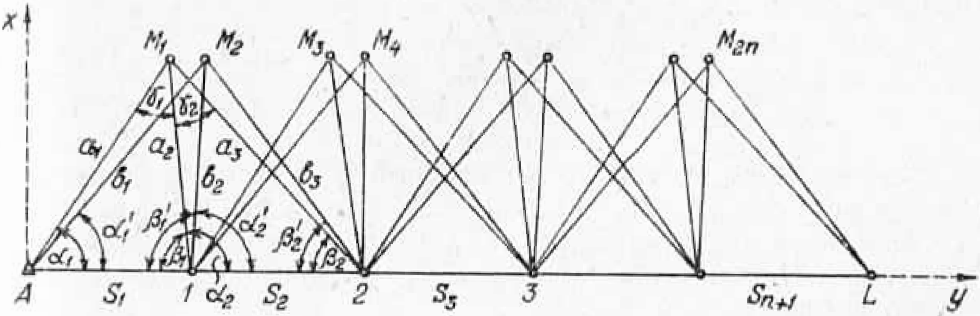

Схема сети трилатерации.

Построение сети трилатерации в виде цепочки треугольников не всегда удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Поэтому можно создавать сети из пучков треугольников, которые лучше удовлетворяют требованиям, предъявляемым к специальным сетям (см. рисунок).

Метод трилатерации позволяет строить сети разнообразных систем, с различным количеством направлений на вспомогательные точки M_1, M_2, ..., M_{2n}, образующие пучки треугольников, исходящие из одной точки. Каждое из этих построений образует своеобразную сеть, которую можно приспособить к различным задачам и условиям. Для данных сетей характерно, что светодальномер устанавливают только в точках ходовой линии AL. На вспомогательных точках M_1, M_2, ..., M_{2n} помещают отражатели.

Ходовую линию выбирают по наивыгоднейшим направлениям в отношении целевого назначения сети, а также в физико-географическом и транспортном отношениях. Длины сторон ходовой линии зависят от назначения сети и необходимой точности. Пункты ходовой линии располагают в местах, выгодных для их дальнейшего использования, с учетом обеспечения видимости между пунктами.

Вспомогательные точки могут быть по обе стороны ходовой линии и могут находиться по одну сторону от нее. Во втором случае уменьшается лишь ширина полосы, обеспечиваемая пунктами вдоль маршрута. Кроме того, наличие вспомогательных точек позволяет повысить точность сети.

Выведем формулы для предрасчета точности свободных сетей трилатерации, состоящих из пучков треугольников.

Средние квадратические ошибки функции уравновешенных элементов геодезической сети вычисляем по формуле

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}, \tag{1}$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса; $\frac{1}{P_F}$ — обратный вес функции;

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \ldots - \frac{[kf(n-1)]^2}{[kk(n-1)]}. \tag{2}$$

Здесь f — частные производные весовой функции; a, b, k — коэффициенты условных уравнений; n — число условных уравнений.

В свободной сети трилатерации (см. рисунок) возникают условные уравнения в каждом пучке треугольников, так как в нем есть одно избыточное измерение.

В угловой форме условное уравнение будет

$$(\beta_1) + (\alpha_2) - (\beta_1') - (\alpha_2') + W = 0;$$
$$W = \beta_1 + \alpha_2 - \beta_1' - \alpha_2', \tag{3}$$

где β_1, α_2, β_1', α_2' — вычисленные углы; (β_1), (α_2), (β_1'), (α_2') — вероятнейшие поправки в вычисленные углы.

Заменим поправки в углы поправками в длины сторон. Связь между поправками в углы и поправками сторон выражается формулами [1]

$$(\beta_1) = \frac{\rho''}{h_1}[(a_1) - \cos\alpha_1 (s_1) - \cos\gamma_1 (a_2)];$$

$$(\alpha_2) = \frac{\rho''}{h_2}[(a_3) - \cos\beta_2 (s_2) - \cos\gamma_2 (a_2)];$$

$$(\beta_1') = \frac{\rho''}{h_1'}[(b_1) - \cos\alpha_1' (s_1) - \cos\gamma_1' (b_2)];$$

$$(\alpha_2') = \frac{\rho''}{h_2'}[(b_3) - \cos\beta_2' (s_1) - \cos\gamma_2' (b_2)], \tag{4}$$

где h_i, h_i' — высота треугольника, опущенная на противолежащую сторону из вершины угла, поправка которого определяется; (a_i), (b_i), (s_i) — поправки в длины сторон.

Подставляя (4) в (3), получаем условное уравнение в окончательном виде:

$$\frac{1}{h_1}(a_1)-\frac{1}{h'_1}(b_1)+\frac{1}{h_2}(a_3)-\frac{1}{h'_2}(b_3)+\left(\frac{\cos\alpha'_1}{h'_1}-\frac{\cos\alpha_1}{h_1}\right)(s_1)+$$
$$+\left(\frac{\cos\beta'_2}{h'_2}-\frac{\cos\beta_2}{h_2}\right)(s_2)-\left(\frac{\cos\gamma_1}{h_1}+\frac{\cos\gamma_2}{h_2}\right)(a_2)+$$
$$+\left(\frac{\cos\gamma'_1}{h'_1}+\frac{\cos\gamma'_2}{h'_2}\right)(b_2)+\frac{1}{\rho''}W=0. \tag{5}$$

Число условных уравнений можно вычислить по формуле

$$Q=P-2N+3, \tag{6}$$

где P — число всех сторон; N — число всех пунктов сети.

Продольный сдвиг ряда. Весовая функция будет иметь вид

$$f_u=\sum_{i=2}^{n+1}(s_i), \tag{7}$$

где n — число пучков.

Для вывода формулы находим закономерности образования квадратичных и неквадратичных коэффициентов в (2). Неквадратичные коэффициенты запишем таким образом:

$$[aa]=[bb]=[cc]=\cdots,\quad [ab]=[bc]=[cd]=\cdots;$$
$$[ac]=[ad]=[bd]=\cdots=0;$$

$$[bb\cdot 1]=[bb]-\frac{[ab]^2}{[aa]}=[aa]\left(1-\frac{[ab]^2}{[aa]}\right)=[aa](1-q^2);$$

$$[cc\cdot 2]=[aa]\left(1-\frac{[ab]^2}{[aa]^2}\frac{1}{1-\frac{[ab]^2}{[aa]^2}}\right)=[aa]\left(\frac{1-2q^2}{1-q^2}\right);$$

$$[dd\cdot 3]=[aa]\left(1-\frac{[ab]^2}{[aa]^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{[ab]^2}{[aa]^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{[ab]^2}{[aa]^2}}}\right)=$$
$$=[aa]\left(\frac{1-2q^2}{1-q^2}\right);$$

. . . .

$$[kk(n-1)]=[aa]\left(1-\frac{[ab]^2}{[aa]^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{[ab]^2}{[aa]^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{[ab]^2}{[aa]^2}\cdot\frac{1}{1-\cdots}}}\right)=$$
$$=[aa]\left(\frac{1-2q^2}{1-q^2}\right).$$

Так как $q = \dfrac{[ab]}{[aa]}$ меньше единицы, то значение дроби

$$x\left\{1 - q^2 \frac{1}{1-q^2} \frac{1}{1-q^2} \frac{1}{1-q^2 \cdots\cdots}\right\}$$

с точностью малой величины второго порядка можно принять равным

$$x\left\{1 - \frac{q^2}{1-q^2}\right\}.$$

Квадратичные коэффициенты имеют вид

$$[ff] = n + 1;$$

$$[af] = [bf] = [cf] = \cdots = [nf];$$

$$[bf \cdot 1] = [af](1-q);$$

$$[cf \cdot 2] = [af]\left\{1 - \frac{q}{1-q^2}(1-q)\right\} = [af]\left(\frac{1-q}{1-q^2}\right);$$

$$[af \cdot 3] = [af]\left\{1 - \frac{q(1-q^2)}{1-2q^2}\left[1 - \frac{q}{1-q^2}(1-q)\right]\right\} =$$

$$= [af]\left(\frac{1-2q^2}{1+q-2q^2-q^3}\right);$$

$$[ef \cdot 4] = [af]\left\{1 - \frac{q(1-q^2)}{1-2q}\left[1 - \frac{q(1-q^2)}{1-2q^2}\left(1 - \frac{q(1-q)}{1-q^2}\right)\right]\right\} =$$

$$= [af]\left(\frac{1-2q^2}{1+q-2q^2-q^3}\right);$$

. . . .

$$[kf(n-1)] = [af]\left(\frac{1-2q^2}{1+q-2q^2-q^3}\right),$$

так как произведения можно выразить геометрическим рядом

$$x\{1 - t(1 - t(1 - t\cdots))\} = x(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \cdots) = x \cdot \frac{1}{1+t}$$

где

$$t = \frac{q(1-q^2)}{1-2q}.$$

Подставив значения коэффициентов в (2), получим

$$\frac{1}{P_u} = (n+1) - \frac{\sigma^2}{z}\left\{1 + \frac{(1-q)^2}{1-q^2} + \frac{1-q^2}{1-2q^2}\left[\left(\frac{1-q}{1-q^2}\right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{1-2q^2}{1+q-2q^2-q^2}\right)\right](n-2)\right\}.$$

где
$$\sigma=\left(\frac{\cos\alpha_1'}{h_1'}-\frac{\cos\alpha_1}{h_1}\right)+\left(\frac{\cos\beta_2'}{h_2'}-\frac{\cos\beta_2}{h_2}\right);$$

$$z=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h_1'^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_2'^2}+\left(\frac{\cos\gamma_1}{h_1}+\frac{\cos\gamma_2}{h_2}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma_1'}{h_1'}+\frac{\cos\gamma_2'}{h_2'}\right)^2. \tag{8}$$

По (8) вычисляем значение $1/P_u$ для сети, составленной из пучков треугольников.

Однако формула (8) громоздка и неудобна для вычислений. Получим $1/P_u$ для случая, когда ряд состоит из типовых пучков треугольников и расстояние между вспомогательными точками M_1 и M_2 менее 10 м. В этом случае $\alpha_1'\approx\alpha_1$, $\beta_2'\approx\beta_2$, $[ab]=[bc]=\ldots=0$, $q=0$, $\left(\frac{\cos\alpha_1'}{h_1'}-\frac{\cos\alpha_1}{h_1}\right)\approx 0$, $\left(\frac{\cos\beta_2'}{h_2'}-\frac{\cos\beta_2}{h_2}\right)\approx 0$, $\sigma=0$.

Тогда (8) примет вид
$$1/P_u=n+1,\quad m_u=\mu\sqrt{n+1}. \tag{9}$$

Поперечный сдвиг ряда и средняя квадратическая ошибка дирекционного угла стороны s_{n+1}. Весовые функции соответственно будут иметь вид

$$f_t=s\left\{-(k-1)\left[\frac{1}{h_1}(a_1)+\frac{1}{h_2}(a_3)-\left(\frac{1}{h_1}\cos\gamma_1+\frac{1}{h_2}\cos\gamma_2\right)(a_2)\right]-\right.$$
$$-(k-2)\left[\frac{1}{h_3}(a_4)+\frac{1}{h_4}(a_6)-\left(\frac{1}{h_3}\cos\gamma_3+\frac{1}{h_4}\cos\gamma_4\right)(a_5)\right]-$$
$$-(k-3)\left[\frac{1}{h_5}(a_7)+\frac{1}{h_6}(a_9)-\left(\frac{1}{h_5}\cos\gamma_5+\frac{1}{h_6}\cos\gamma_6\right)(a_8)\right]-$$
$$-\cdots+(k-1)\frac{\cos\alpha_1}{h_1}(s_1)+\left[\frac{(k-1)\cos\beta_2}{h_2}+\frac{(k-2)\cos\alpha_3}{h_3}\right](s_2)+$$
$$+\left[\frac{(k-2)\cos\beta_4}{h_4}+\frac{(k-3)\cos\alpha_5}{h_5}\right](s_3)+\cdots\frac{\cos\beta_{2n}}{h_{2n}}(s_{n+1});$$

$$f_\alpha=\rho''\left\{\frac{1}{h_1}(a_1)+\frac{1}{h_2}(a_3)+\frac{1}{h_3}(a_4)+\frac{1}{h_4}(a_6)+\cdots-\right.$$
$$-\left(\frac{\cos\gamma_1}{h_1}+\frac{\cos\gamma_2}{h_2}\right)(a_2)-\left(\frac{\cos\gamma_3}{h_3}+\frac{\cos\gamma_4}{h_4}\right)(a_5)-\left(\frac{\cos\gamma_5}{h_5}\frac{\cos\gamma_6}{h_6}\right)(a_8)-$$
$$-\cdots-\frac{\cos\alpha_1}{h_1}(s_1)-\left(\frac{\cos\beta_2}{h_2}+\frac{\cos\alpha_3}{h_3}\right)(s_2)-$$
$$-\left(\frac{\cos\beta_4}{h_4}+\frac{\cos\alpha_5}{h_5}\right)(s_3)-\cdots-\frac{\cos\beta_{n+3}}{h_{n+3}}(s_{n+1}).$$

Находя закономерности в образовании квадратичных и неквадратичных коэффициентов, получаем формулы для оценки точности

$$\frac{1}{P_t}=\frac{s^2}{h^2}\left\{\frac{1}{6}k(k-1)(2k-1)(1+2\cos^2\gamma)+[(2k-2)^3-\right.$$

$$\left.-2k-4]\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\right\}=\frac{s^2}{h^2}\cdot A; \qquad (10)$$

$$\frac{1}{P_\alpha}=\frac{\rho''^2}{h^2}[(1+2\cos^2\gamma+4\cos^2\alpha)n-3\cos^2\alpha]=\frac{\rho''^2}{h^2}\cdot B;$$

$$m_t=\mu\frac{s}{h}\sqrt{A}; \quad m_\alpha=\mu\frac{\rho''}{h}\sqrt{B}. \qquad (11)$$

Проверка формул на ЭВМ

Номер проверки	$1/P_u$ по формуле	$1/P_u$ ЭВМ	Ошибка, %	$1/P_t$ по формуле	$1/P_t$ ЭВМ	Ошибка, %	$1/P_\alpha \cdot h^2/\rho''^2$ по формуле	$1/P_\alpha \cdot h^2/\rho''^2$ ЭВМ	Ошибка, %
				Модель 1 ($s_i=1000$ м, $\alpha\approx\beta\approx26°40'$)					
3	1,00	1,00	0	2,18	2,17	0,5	2,20	2,21	0,4
4	2,00	2,00	0	15,00	15,07	0,5	6,80	6,88	1,2
5	3,00	3,00	0	47,61	48,94	2,7	11,40	11,60	1,7
6	4,00	4,00	0	109,22	111,94	2,4	16,01	16,29	1,7
7	5,00	5,00	0	209,05	214,37	2,5	20,61	20,96	1,7
8	6,00	6,00	0	358,71	365,14	1,8	25,21	25,58	1,4
9	7,00	7,00	0	562,85	574,64	2,0	29,81	30,16	1,2
10	8,00	8,00	0	829,87	849,77	2,3	34,41	34,74	0,9
				Модель 2 ($s_i=1000$ м, $\alpha\approx\beta\approx45°$)					
3	1,00	1,00	0	2,49	2,42	3,0	2,50	2,52	0,8
4	2,00	2,00	0	14,94	15,13	1,2	6,50	6,59	1,4
5	3,00	3,00	0	45,34	45,09	1,6	10,50	10,67	1,6
6	4,00	4,00	0	101,65	103,71	2,0	14,50	14,77	1,8
7	5,00	5,00	0	191,86	196,04	2,1	18,50	18,83	1,8
8	6,00	6,00	0	325,44	330,34	1,5	22,50	22,87	1,6
9	7,00	7,00	0	505,88	518,52	2,4	26,50	26,86	1,3
10	8,00	8,00	0	745,63	760,72	2,0	30,50	30,88	1,2

Проверку формул (9), (10), (11) выполняли на аналогичных моделях путем решения системы нормальных уравнений на ЭВМ ЕС-1030. Результаты приведены в таблице.

Из приведенных результатов вычислений видно, что полученные формулы позволяют вычислять $1/P_{u,t,\alpha}$ с погрешностью 3%.

Список литературы: 1. *Вировец А. М.* Высшая геодезия. — М.: Недра, 1970, ч. 1. 2. *Дурнев А. И.* Новые системы построения геодезических сетей. — М.: Геодезиздат, 1952.

Статья поступила в редколлегию 20. 04. 84