УДК 528.658

В. А. ВИЛЕНСКИЙ, С. Н. ХОДОРОВ

ЭКОНОМИКО-ТОЧНОСТНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДВУХРАЗРЯДНОЙ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

В современном геодезическом производстве намечается тенденция к созданию одноклассных геодезических построений. Однако не во всех случаях геодезической практики построение одноклассных сетей оправдано и эффективно. Так, в две или три стадии построения конструируются строительные геодезические сетки, проектируется геодезическое обоснование при наблюдениях за горизонтальными и вертикальными смещениями крупных инженерных комплексов и т. д. В реальном проектировании многоступенчатых построений при предвычислении точности их элементов в качестве исходных данных для оценок берут соотношения точностей измерений в разрядах сети. Выполняя расчет ошибок измерений в соответствующих разрядах сети для достижения необходимой точности запроектированных элементов построения, следует помнить и об экономических факторах. К таким факторам относится время, затрачиваемое на измерения, или стоимость последних. В геодезической литературе установилось мнение, что стоимость геодезических работ пропорциональна числу градаций сети. Должного обоснования указанной альтернативе не имеется. Вопросы экономической целесообразности построения многоразрядных геодезических сетей с учетом их точностных характеристик малоизучены. Поэтому актуально изучение влияния точностных показателей многоразрядных геодезических сетей на стоимостные параметры с позиций теории оптимального их проектирования. Этому вопросу и посвящен изложенный ниже материал исследования.

Для упрощения выкладок произведем экономико-точностной анализ построения геодезической сети при двухразрядной ее градации. Исследования выполним на модели (см. рисунок), предположив, что она создается поочередно методами триангуляции и трилатерации. Идея эксперимента заключается в том, что геодезическая сеть триангуляции или трилатерации оценивается вначале как одноразрядная, а затем — как построение двух порядков точности; при этом количество пунктов неизменно. Цель эксперимента — сравнение затрат на производство измерений при одно- и двухступенчатом методе развития геодезического обоснования с учетом определения минимального значения этих затрат.

Приведем вначале результаты строгой оценки точности одноразрядных сетей триангуляции и трилатерации. При $\mu_{\beta_1}=1''$ в триангуляции получаем значение $m_p=1,19$ см и при $\mu_{s_1}=1$ см в трилатерации, когда коэффициенты уравнения регрессии $\mu_s= =a+b\cdot s$ прибора $a=1$, $b=0$ и $s=1$ км, имеем $m_p=2,32$ см. Здесь m_p — средняя квадратическая ошибка положения слабого пункта сети. Для произвольных значений μ_{β_1} и μ_{s_1} получаем

$$m_{p_s}=1,19\,\mu_{\beta_1}; \quad (1)$$

$$m_{p_s}=2,32\,\mu_{s_1}. \quad (2)$$

Формулы (1), (2) позволяют рассчитать ошибки измерений в одноразрядных сетях триангуляции и трилатерации при заданной точности положения слабого пункта. Зная ошибки измерений как функции ошибок координат слабого пункта построения, нетрудно определить стоимость измерений (табл. 1) как для одного пункта или одной линии, так и общую стоимость [1, 2].

Таблица 1

Расчет стоимости измерений для одноразрядных сетей

m_p, см	Триангуляция				Трилатерация			
	μ''_{β_1}	$C_{тр.}$ на 1 пункт, руб.	к-во пунктов	$C_{тр.}$, руб.	μ_{s_1}, см	$C_{трил.}$ на 1 линию, руб.	к-во линий	$C_{трил.}$, руб.
5	4,2	4,08	19	77,52	2,2	3,66	42	153,72
10	8,4	2,17	19	41,23	4,3	1,52	42	63,84
15	12,6	1,98	19	37,62	6,5	0,93	42	39,06

Приведем теперь результаты оценки точности двухразрядных сетей (табл. 2). Исследуемая сеть триангуляции состоит из семи пунктов первого разряда и 19 пунктов второго разряда, а трилатерации — из 12 линий первой ступени и 42 линий второй ступени. Длины линий в первой ступени составляют 1,7 км, а во второй — 1 км.

В табл. 2 μ_{β_1} и μ_{β_2} — средние квадратические ошибки измерения углов соответственно на первой и второй стадиях обоснования, a и b — коэффициенты уравнения регресии прибора. В результате последующего анализа установлено, что в рассматриваемых моделях угловой и линейной триангуляций ошибки положения слабого пункта m_p достаточно хорошо описываются линейными функциями

$$m_{p_s}=0,7\mu_{\beta_1}+0,36\,\mu_{\beta_2}; \quad (3)$$

$$m_{p_s}=1,6\,\mu_{s_2}+0,25\,\mu_{s_1}. \quad (4)$$

Сформулируем теперь задачу оптимизации измерений при проектировании двухразрядных сетей триангуляции и трилатерации. В каждой из этих задач требуется найти параметры

μ_{β_1} и μ_{β_2} или μ_{s_1} и μ_{s_2}, которые обеспечивают экстремальное значение целевых функций [1, 2]

$$C_{i\,тр}=2,36-\frac{11,22}{\mu_{\beta i}}+\frac{83,57}{\mu_{\beta i}^2}-\frac{25.53}{\mu_{\beta i}^3}; \quad (5)$$

$$C_{i\,трил.}=\frac{5\cdot 10^{-5}}{(\mu_{s_i}/s)}+\frac{6,7\cdot 10^{-10}}{(\mu_{s_i}/s)^2}, \quad (6)$$

где $C_{i\,тр.}$ и $C_{i\,трил.}$ — соответственно стоимости измерений в триангуляции и трилатерации. В результате решения задачи получим параметры μ_{β_i} или μ_{s_i}, которые оптимальны, если соответствуют минимуму стоимости. Стоимость измерений двухразрядных сетей складывается из стоимостей измерений сети первого и второго разрядов, т. е.

Таблица 2

Оценка точности двухразрядных сетей

Триангуляция			Трилатерация		
μ''_{β_1}	μ''_{β_2}	m_p, см	a	b	m_p, см
2	3	2,49	1	0	1,78
2	4	2,88	1	1	3,87
2	5	3,22	1	2	5,93
2	6	3,55	1	3	7,97
3	4	3,51	1	4	10,02
3	5	3,95	2	1	5,67
3	6	4,32	2	2	7,74
3	7	4,67	2	3	9,80
4	6	4,98	2	4	11,85
4	7	5,39	3	1	7,46
4	8	5,76	3	2	9,55
4	9	6,11	3	3	11,62

Таблица 3

Расчет стоимости измерений в сетях триангуляции и трилатерации

m_p, см	Триангуляция		Трилатерация	
	$n=1$	$n=2$	$n=1$	$n=2$
5	77,52	80,25	153,72	169,50
10	41,23	53,12	63,84	69,66
15	37,62	51,41	39,06	43,14

$$C_{i\,тр.}=C^1_{тр.}+C^2_{тр.}; \quad (7)$$

$$C_{i\,трил.}=C^1_{трил.}+C^2_{трил.}. \quad (8)$$

Соотношения (7), (8) являются функциями двух переменных. Полагая m_p заданным, нетрудно определить значения μ_{β_1} и μ_{s_1} из соотношений (3), (4):

$$\mu_{\beta_1}=\frac{m_p-0,36\,\mu_{\beta_2}}{0,7}; \quad (9) \qquad \mu_{s_1}=\frac{m_p-1,6\,\mu_{s_2}}{0,25}. \quad (10)$$

В окончательном виде целевые функции для рассматриваемых моделей примут вид

$$C_{i\,тр.}=61,36-\frac{54,98}{m_p-0,36\,\mu_{\beta_2}}+\frac{286,64}{(m_p-0,36\,\mu_{\beta_2})^2}-$$
$$-\frac{61,30}{(m_p-0,36\,\mu_{\beta_2})^3}-\frac{213,18}{\mu_{\beta_2}}+\frac{1587,83}{\mu_{\beta_2}^2}-\frac{485,07}{\mu_{\beta_2}^3}; \quad (11)$$

$$C_{i\,трил.}=\frac{26}{m_p-1,6\,\mu_{s_2}}+\frac{15,1}{(m_p-1,6\,\mu_{s_2})^2}+\frac{210}{\mu_{s_2}}+\frac{281,4}{\mu_{s_2}^2}. \quad (12)$$

Выражения (11), (12) составлены на основе стоимости измерений на одном пункте триангуляции (5) и стоимости измерений одной линии трилатерации (6) и с учетом формул (9), (10).

Определим далее, при каких значениях μ_{β_2} и μ_{s_2} функции (11) и (12) имеют минимумы. Для этого найдем производные $\frac{dC_{тр.}}{d\mu_{\beta_2}}$, $\frac{dC_{трил.}}{d\mu_{s_2}}$ и приравняем их к нулю. Получим соответственно нелинейные уравнения четвертой и шестой степеней. Решая каждое из них относительно μ_{β_2} или μ_{s_2}, находим неотрицательные их корни. Затем путем подстановки μ_{β_2} в (9) и μ_{s_2} в (10) отыскиваем значения μ_{β_1} и μ_{s_1}. Следовательно, стоимость измерений будет минимальна в таких случаях.

Двухразрядная триангуляция

$m_p=5$ см, $\mu_{\beta_1}=4,0''$, $\mu_{\beta_2}=6,2''$,

$m_p=10$ см, $\mu_{\beta_1}=8,4''$, $\mu_{\beta_2}=11,5''$,

$m_p=15$ см, $\mu_{\beta_1}=14,0''$, $\mu_{\beta_2}=14,4''$.

Двухразрядная трилатерация

$m_p=5$ см, $\mu_{s_1}=4,0$ см, $\mu_{s_2}=2,5$ см,

$m_p=10$ см, $\mu_{s_1}=9,3$ см, $\mu_{s_2}=4,8$ см,

$m_p=15$ см, $\mu_{s_1}=13,3$ см, $\mu_{s_2}=7,3$ см.

Подставляя значения μ_{β_2} и μ_{s_2} соответственно в формулы (11) и (12), нетрудно получить оптимальную стоимость измерений. Результаты расчетов приведены в табл. 3, в которой n — количество разрядов в сети. Из анализа данных, приведенных в табл. 3, следует:

стоимость измерений существенным образом зависит от точности параметров проектируемой сети;

стоимость одноразрядных построений рассматриваемых моделей во всех случаях меньше, чем стоимость двухразрядных. При этом в трилатерации это различие составляет 10%, а в триангуляции колеблется от 4 до 35%;

в необходимых случаях геодезической практики не следует стремиться строить сеть одного порядка точности, опасаясь, что необходимое ее сгущение значительно увеличит затраты на измерения.

Данные табл. 3 послужили исходными для получения следующих эмпирических формул.

Трилатерация

$$\text{при } n=1\ C=19,95+\frac{160,49}{m_p}+\frac{2553,1}{m_p^2}; \quad (13)$$

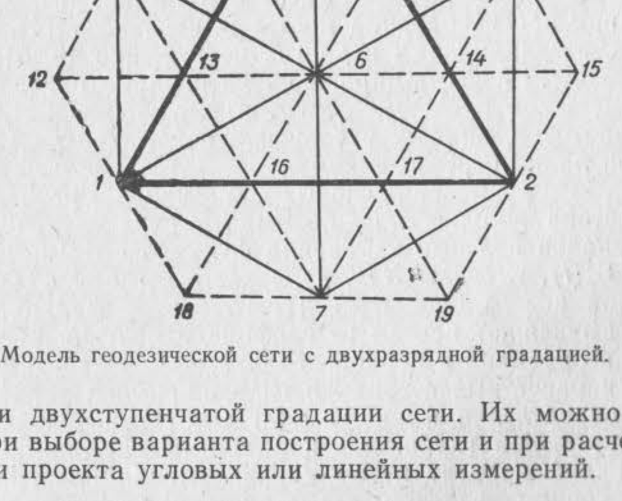
$$\text{при } n=2\ C=20,99+\frac{188,42}{m_p}+\frac{2781,1}{m_p^2}. \quad (14)$$

Триангуляция

$$\text{при } n=1\ C=20,63+\frac{185,58}{m_p}+\frac{488,54}{m_p^2}; \quad (15)$$

$$\text{при } n=2\ C=33,48+\frac{219,9}{m_p}+\frac{67,56}{m_p^2}. \quad (16)$$

Выведенные формулы позволяют по заданной точности положения слабого пункта типового геодезического построения (см. рисунок) рассчитать оптимальную стоимость измерений для одно- или двухступенчатой градации сети. Их можно использовать при выборе варианта построения сети и при расчете сметной части проекта угловых или линейных измерений.



Модель геодезической сети с двухразрядной градацией.

1. *Ходоров С. Н.* Технико-экономический анализ многоразрядных геодезических построений с учетом критерия ничтожности влияния ошибок исходных данных // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 44. С. 81—86. 2. *Ходоров С. Н.* Экономическая оценка построения трилатерационных сетей в землеустроительной практике // Сб. науч. тр. Львов. с.-х. ин-та. 1986. С. 77—81.

Статья поступила в редколлегию 02. 12. 86